

УПРАВЛЕНИЕ МАРШРУТНОЙ СЕТЬЮ С ПРИМЕНЕНИЕМ ПРИНЦИПОВ ПАРАДОКСА БРАЕСА

*Григорий Арменович Гаспарян,
orcid.org/0009-0007-3917-6256,
аспирант
Московский государственный технический
университет гражданской авиации,
Кронштадтский б-р, 20
Москва, 125493, Россия
grigory.rw@gmail.com*

*Егор Александрович Драченко,
orcid.org/0009-0004-2434-8594,
аспирант
Московский государственный технический
университет гражданской авиации,
Кронштадтский б-р, 20
Москва, 125493, Россия
egordrachenko@icloud.com*

Аннотация. В работе рассматривается применение парадокса Браеса к оптимизации воздушной сети. На основе разработанной ранее модели подтверждается возможность уменьшения суммарного времени полёта за счёт целенаправленного удаления рёбер из маршрутной сети. Однако статическая постановка задачи ограничивает применимость метода в условиях реальной динамики движения. В данном исследовании предложено расширение подхода за счёт использования динамического назначения движения и метода устойчивого удаления, учитывающего неопределённость спроса. Проведённые численные эксперименты показывают, что удаление определённых рёбер может приводить к устойчивому снижению задержек даже при изменяющемся объёме движения. Разработанный подход может быть использован для стратегического управления воздушным пространством с учётом временной динамики и ограничений пропускной способности.

Ключевые слова: проектирование маршрутных сетей, парадокс Браеса, перегрузка воздушного пространства.

AIRWAY NETWORK CONTROL THROUGH THE APPLICATION OF BRAESS' PARADOX

*Grigory A. Gasparyan,
orcid.org/0009-0007-3917-6256,
postgraduate student
Moscow state technical university of civil aviation,
20, Kronshtadtskiy blvd
Moscow, 125493, Russia
grigory.rw@gmail.com*

*Egor A. Drachenko,
orcid.org/0009-0004-2434-8594,
postgraduate student
Moscow state technical university of civil aviation,
20, Kronshtadtskiy blvd
Moscow, 125493, Russia
egordrachenko@icloud.com*

Abstract. The paper explores the application of Braess's Paradox to the optimization of air traffic networks. Building upon the model proposed earlier, it is confirmed that removing specific edges from the route structure can reduce overall flight time. However, the original static formulation limits its applicability under real-world dynamic traffic conditions. An extended framework incorporating Dynamic Traffic Assignment and robust removal methods that account for demand uncertainty are proposed. Simulation results demonstrate that eliminating certain edges consistently leads to reduced delays, even under fluctuating traffic scenarios. The developed approach offers a practical tool for strategic airspace management, enabling resilient network reconfiguration under dynamic and capacity-constrained environments.

Key words: airway network design, Braess's Paradox, air traffic congestion.

Введение

Современная система организации воздушного движения (ОрВД) сталкивается с всё более усложняющимися задачами: рост числа рейсов, ограниченные объёмы воздушного пространства (ВП), а также необходимость минимизации задержек при соблюдении требований безопасности. Эффективное управление маршрутизацией в таких условиях требует не только точного моделирования потоков, но и гибких подходов к оптимизации маршрутной сети [ICAO..., 1984].

Одним из нетривиальных явлений, влияющих на эффективность транспортных сетей, является парадокс Браеса – ситуация, при которой удаление одного или нескольких рёбер из сети может привести к снижению общего времени в пути. В контексте маршрутов обслуживания воздушного движения (ОВД) это означает, что закрытие их части, вопреки интуиции, может оптимизировать использование оставшегося пространства и тем самым уменьшить суммарные задержки [Bertsimasetal., 2000].

В работе [Tcheukametal.,2016] была представлена первая попытка применить парадокс Браеса к маршрутной сети. Авторы использовали модели потока-задержки для оценки временных издержек на каждом маршруте и показали, что удаление определённых рёбер действительно может снизить общее время полёта на 3–4 %. Тем не менее, несмотря на новизну подхода, предложенная модель носит статический характер и применима лишь в ограниченных условиях: на одном уровне эшелонирования, без учёта временной динамики, неопределённости трафика и ограничений.

Целью данной работы является развитие метода анализа воздушной сети с учётом парадокса Браеса путём внедрения динамической модели назначения (ДТА) и задачи устойчивого удаления рёбер (robust removal). Это позволяет учитывать временные флуктуации входного потока и неопределённость движения, обеспечивая более надёжную идентификацию критических

сегментов и предотвращая неэффективные управленческие решения, возможные при статическом подходе.

Настоящее исследование расширяет и дополняет указанный подход за счёт включения следующих ключевых аспектов:

1. Динамическое назначение движения – позволяет моделировать поведение маршрутной сети во времени, учитывая часовые и минутные колебания спроса. Вместо стационарного равновесия проводится исследование, как маршруты заполняются во времени и какие узкие места возникают при пиковом спросе.

2. Робастная (устойчивая) оптимизация при удалении рёбер – рассматривается множество сценариев изменения потока (например, из-за погодных условий или задержек на земле) и находятся такие рёбра, удаление которых приводит к устойчивому улучшению ситуации в разных условиях. Это позволяет избежать принятия решений, эффективных лишь при идеальных допущениях.

3. Учёт мультиуровневой структуры ВП – реальное ВП использует десятки эшелонов. Обосновывается подход к обобщению модели на многослойную структуру с перекрёстными связями между уровнями (FL290 – FL390), что повышает применимость модели в реальных системах ОрВД.

4. Системные ограничения и безопасность – добавляются ограничения на пропускную способность секторов, минимальные дистанции между ВС и возможности разрешения конфликтов. Это позволяет оценить не только экономическую эффективность, но и реализуемость предложенных маршрутов [Елисеев и др., 2016].

Комбинация вышеуказанных факторов приводит к более реалистичной и практически значимой модели управления маршрутной сетью, в которой можно как выявить парадокс Браеса, так и предложить стратегии устойчивой модификации сети. В данном исследовании демонстрируется, как с помощью ДТА-моделирования и устойчивого удаления можно обнаружить «вредные» рёбра и обоснованно предложить их отключение. Такой подход может лечь в основу будущих автоматизированных систем планирования маршрутов и предобработки потоков на этапах стратегического планирования [Dynamiccostindexing..., 2009].

Материалы и методы

Материалом исследования послужила модель воздушной маршрутной сети, предложенная в работе [Dynamictrafficnetworkmodel..., 2014], включая графовое представление сегментов маршрутов, статистику задержек и сценарии удаления рёбер. Также использовались данные симуляций с вариативным входным потоком для построения сценариев с различной загрузкой сети.

Методологическая база исследования включает в себя математическое моделирование, методы анализа графов, элементы теории управления воздушным движением, симуляционное моделирование, а также методы оценки чувствительности и устойчивости. Дополнительно применяются

методы динамического назначения маршрутов, регрессионного анализа и визуализации зависимости затрат от нагрузки на рёбра сети.

Парадокс Браеса в транспортных сетях

Парадокс Браеса описывает явление, при котором модификация структуры транспортной сети, предпринимаемая с целью оптимизации движения, неожиданно вызывает ухудшение его условий.

В контексте воздушного транспорта аналогичный принцип наблюдается при планировании маршрутов авиакомпаниями. Центры управления полётами (ЦУП) определяют маршруты для каждого рейса, опираясь на характеристики ВС и стратегию самой авиакомпании. Эти решения принимаются в рамках эксплуатационных ограничений, но с прицелом на выгоду конкретной компании, без учёта влияния на другие ЦУП. Хотя диспетчеры могут корректировать маршрут в тактическом режиме, в целом они следуют первоначальному плану [Eurocontrol..., 2003].

До настоящего времени большинство исследований парадокса Браеса опиралось на каноническую четырёхсвязную симметричную модель. Исследования, направленные на изучение данного явления в масштабных сетях с реальным транспортным спросом, являются редкими. Было доказано, что задача идентификации парадокса относится к классу вычислительно трудных, особенно в прикладных системах, и до сих пор не разработано эффективных алгоритмов, применимых к большим сетям. Одним из подходов является эвристический метод на базе генетических алгоритмов, при котором связи последовательно исключаются из сети, а затем оценивается, влияет ли это на общее снижение затрат. Однако данный метод эффективен лишь в небольших сетях [Веремей и др., 2016].

Также была предложена альтернативная модель маршрутизированного поиска, предназначенная для обнаружения парадокса в устойчивых динамических сетях. Основным недостатком метода является экспоненциальное увеличение вычислительных затрат по мере роста размеров сети. В целом, большинство существующих подходов страдают от необходимости полного перебора комбинаций связей и маршрутов, что делает их неприменимыми к системам большого масштаба.

С целью более продуктивной идентификации звеньев или маршрутов, приводящих к возникновению парадокса, в работах [Vickrey, 1969] предложена модифицированная модель, позволяющая улучшить условия движения хотя бы для части пользователей, при этом, не ухудшая их для остальных по сравнению с UE. Модель получила название «равновесие по Браесу» (Braess's Equilibrium, BE), поскольку она логически вписывается в рамки концепций UE и SE. Благодаря высокой вычислительной сложности задачи в реальных условиях, модель BE оказалась перспективной для решения задачи обнаружения потенциальных источников парадокса [Rosenbergeretal., 2004].

Именно на этой модели ВЕ базируется методика, предложенная в данном исследовании, предназначенная для выявления маршрутов или звеньев в сети, способных вызывать парадокс Браесса.

Методология регистрации траекторий и формирование функции стоимости

Воздушное пространство, содержащее множественные маршруты и навигационные точки, может быть представлено в виде сети, где узлы соответствуют точкам маршрутов, а дуги – воздушным сегментам между ними. В горизонтальной плоскости такая структура моделируется как двумерная маршрутная сеть: узлы обозначают точки (WP), а связи – это допустимые траектории между ними. Каждый маршрут в подобной конфигурации определяется как последовательность связей (звеньев), соединяющих начальную и конечную точки через промежуточные WP.

Для обеспечения эшелонирования – и, как следствие, безопасности полётов (БП) – структура ВП, как правило, организована в виде многоуровневой архитектуры. Это отражено на рисунке 1, где показано, что маршруты располагаются на различных эшелонах, формируя, по сути, многослойную сеть. Таким образом, ВС обязаны придерживаться определённых маршрутов и эшелонов, соответствующих регламенту эшелонирования.

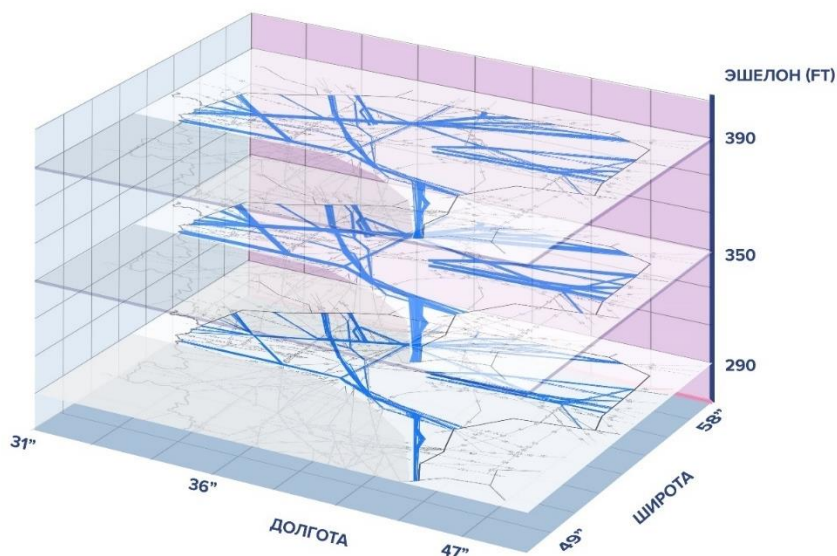


Рисунок 1 – Сетевая структура эшелонированного маршрута на основе данных ВРЛ и АЗН-В

Так как пропускная способность ВП ограничена, при превышении допустимого уровня движения возрастает риск перегрузки. Один из потенциальных способов её снижения – это включение в сеть дополнительных маршрутов, которые могли бы перераспределить движение с перегруженных направлений на менее загруженные. Однако следует учитывать, что проектирование новых маршрутов сопряжено с множеством ограничений: процедурных, эксплуатационных, географических и технических. В результате структура маршрутной сети зачастую оказывается чрезвычайно

сложной, что делает задачу её модификации, особенно за счёт добавления звеньев, весьма непростой на практике [Печенежский и др., 2023].

Далее рассматривается нетривиальный подход к оптимизации конфигурации маршрутной сети, основанный на идеях парадокса Браеса. Предлагается, что для фиксированной структуры маршрутов на заданном эшелоне целесообразно рассматривать не только добавление, но и удаление определённых звеньев. Целью является нахождение таких маршрутов или сегментов, исключение которых может привести к сокращению суммарного времени перемещения, при этом не ухудшая уровень удовлетворения спроса на авиаперевозки [Applyingcomplexity...,2015].

Разрабатываемый подход включает в себя три основных этапа: регистрацию траекторий, построение функции стоимости и выявление эффектов парадокса Браеса. Чтобы наглядно представить взаимодействие между этими компонентами, на рисунке 2 показана концептуальная схема предложенной методики. В качестве иллюстративного примера рассматривается маршрутная сеть Московской воздушной зоны (МВЗ), что позволяет продемонстрировать реализацию подхода на реальных данных.

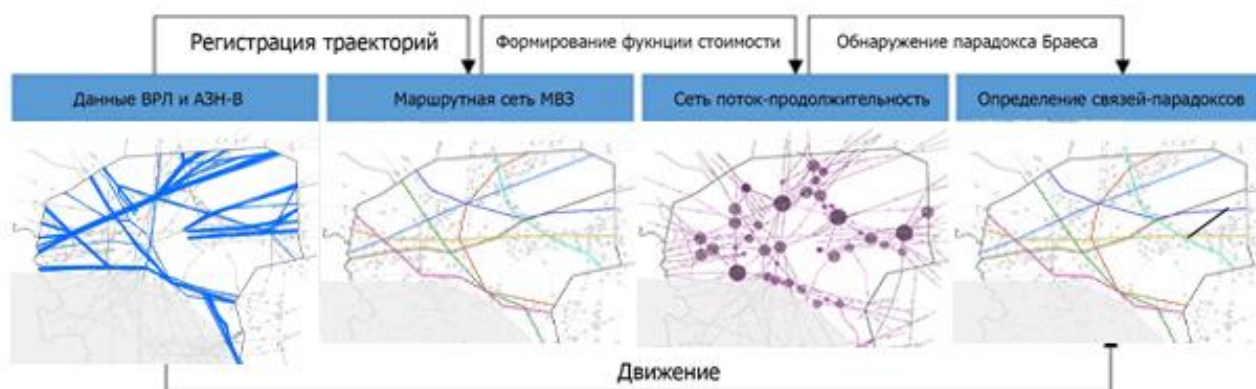


Рисунок 2 – Концептуальная схема предлагаемого метода обнаружения парадокса Браеса в заданной сети маршрутов ОВД

Первый этап – регистрация траекторий – направлен на сопоставление данных о движении ВС, полученных с помощью систем вторичного радиолокационного наблюдения (ВРЛ) и АЗН-В, с маршрутной структурой МВЗ. Это позволяет привязать фактические траектории к конкретным звеньям маршрутной сети и извлечь числовые характеристики движения (количество рейсов), необходимые для последующих расчётов.

В результате этого этапа устанавливается зависимость между интенсивностью движения (т.е. числом пролетевших ВС) и временем прохождения каждого звена. На схематичном изображении сети потоков и временных затрат (рисунок 2) размер окружностей в начале и конце связей визуализирует среднюю продолжительность полёта на соответствующем сегменте: чем крупнее символ, тем выше временные издержки на этом участке.

Следующий шаг – формирование функции стоимости – заключается в построении математических моделей, отображающих стоимость (например, в терминах времени полёта) прохождения каждого звена в зависимости от текущей нагрузки на него. Эти функции используются как базис для последующего анализа.

Наличие функций стоимости и информации о суммарном движении позволяет перейти к финальному этапу – обнаружению эффекта парадокса Браеса. Он заключается в решении задачи нелинейной оптимизации, цель которой – выявить те сегменты маршрутной сети (так называемые связи-парадоксы, или *Links of Paradox*, LOP), которые, вопреки ожиданиям, увеличивают общие издержки при своём наличии в сети.

Детальное описание каждого из этапов методики приводится в следующих подразделах.

Таблица 1 – Алгоритм 1. Алгоритм регистрации траектории

Вход: данные ВРЛ и АЗН-В
1. Найти наилучший сегмент маршрута A_j , состоящего из последовательности $S = (A_k^j, \dots, A_m^j, \dots, A_h^j)$, минимально отличающийся на D_{min} от траектории T_i .
2. Если $D_{min} > D_0$, траектория T_i считается неподходящей и исключается.
3. Если $D_{min} \leq D_0$, найти наилучшие сопоставленные сегменты $T_s = (T_l^i, \dots, T_p^i, \dots, T_q^i)$ на T_i для A_s таким образом, чтобы T_s минимально отличался от A_s .
4. Добавить единичный поток к каждому сегменту $A_{s_y} = (A_y^j, A_{y+1}^j)$, $y = k, \dots, m, \dots, h$ в A_s .
5. Каждый сегмент $T_{s_x} = (T_x^i, T_{x+1}^i)$; $x = l, \dots, p, \dots, q-1$ в T_s зарегистрировать на участках маршрута (A_m^j, A_{m+1}^j) в A_s таким образом, чтобы отличие от T_{s_x} было минимальным.
6. Остаток траектории $T_i; (T_1^i, \dots, T_l^i)$ и (T_q^i, \dots, T_n^i) рассматривать как новые траектории и повторить с шага 1.
Выход: зависимость между потоком и временем полёта на каждом звене маршрутной сети

Для того чтобы можно было зафиксировать проявление парадокса Браеса в маршрутной сети, необходимо наличие зависимости между интенсивностью потока и временем прохождения по каждому из звеньев сети. В связи с этим осуществляется обработка данных о траекториях ВС, с целью их привязки к структуре МВЗ. Для построения таких зависимостей используется информация, полученная от вторичных радиолокаторов и приёмников АЗН-В, собранная за определённый временной интервал.

Процедура регистрации траекторных данных по сети представлена в таблице 1, где описывается пошаговый алгоритм привязки реальных

траекторий к элементам маршрутной структуры. Применяемые в алгоритме обозначения и переменные:

$T_i : (T_1^i, T_2^i, T_3^i, \dots, T_k^i, \dots, T_{n_i}^i)$ – i -я траектория, где T_k^i – k -я путевая точка на T_i . T_i состоит из $n_i - 1$ последовательных связей. При случайном выборе двух точек T_k^i и T_g^i , образующих сегмент ST_{kg}^i , существует $\binom{n_i}{2}$ различных сегментов траектории.

$A_j : (A_1^j, A_2^j, A_3^j, \dots, A_h^j, \dots, A_{m_j}^j)$ – j -й маршрут ОВД, где A_h^j – h -я точка на A_j . A_j состоит из $m_j - 1$ последовательных звеньев. При случайном выборе двух точек A_h^j и A_l^j , образующих сегмент SA_{hl}^j , существует $\binom{m_j}{2}$ различных сегментов маршрута.

Расстояние между сегментами ST_k^i и SA_{hl}^j определяется как сумма квадратов расстояний между начальными и конечными точками каждого сегмента: $D = (x_k^i - x_{hl}^j)^2 + (y_k^i - y_{hl}^j)^2 + (x_{k+1}^i - x_{h(l+1)}^j)^2 + (y_k^i - y_{h(l+1)}^j)^2$. Чем больше расхождение между двумя сегментами, тем выше значение D .

Как иллюстрируется на рисунке 3, в микроскопическом рассмотрении, каждому фрагменту фактической траектории, сопоставленному с определённым участком маршрута, соответствуют звенья, по которым прошло ВС. Эти звенья из траекторных данных регистрируются на эквивалентных звеньях маршрутной сети. Временные затраты, зафиксированные на каждом таком участке траектории, накапливаются и суммируются в качестве времени прохождения для соответствующих звеньев маршрута. С макроскопической точки зрения, вся траектория T_i назначается на тот сегмент трассы, для которого значение D минимально и при этом $D \leq D_0$. Если минимальное значение D превышает D_0 , такая траектория не считается подходящей и исключается из анализа. Пороговое значение D_0 определяет максимально допустимое отклонение: при $D > D_0$ предполагается, что траектория не сопоставима ни с одним сегментом маршрута.

Каждый сегмент траектории сопоставляется с подходящим участком маршрутной сети. В случае частичного совпадения, совпадающая часть учитывается и регистрируется, а оставшийся фрагмент трактуется как новая независимая траектория, подлежащая повторной обработке. Этот процесс продолжается до тех пор, пока вся траектория не будет либо полностью распределена по маршрутной сети, либо отклонена как нерелевантная. При успешной регистрации сегмента на маршрут, соответствующим связям в сети прибавляется единичное значение потока. То есть на рисунке 3 с макроуровня: часть 1 траектории T_1 будет зарегистрирована на маршрут A_1 , часть 2 – на A_2 . По одному единичному потоку добавляется в A_1 и A_2 . С микроуровня: время на ST_1^1 , ST_2^1 , ST_3^1 добавляется к звену SA_{12}^2 ; время на ST_4^1 , ST_5^1 , ST_6^1 – к SA_{23}^2 .

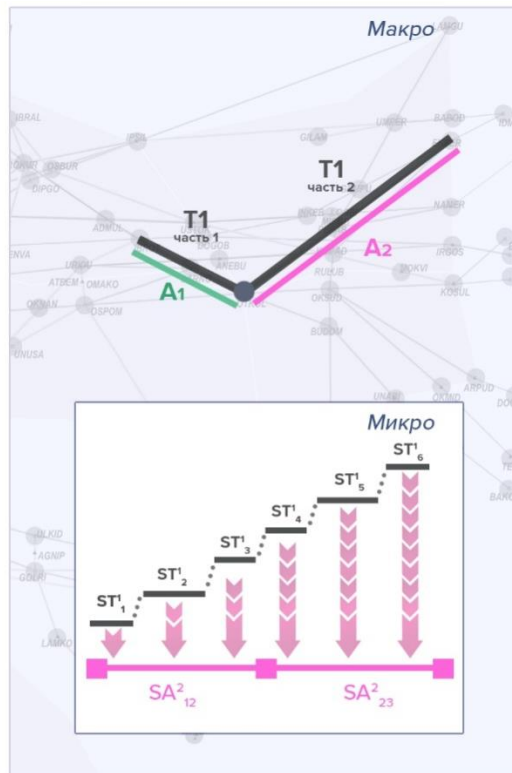


Рисунок3 – Регистрация траекторий на маршруты

После завершения сопоставления всех сегментов траекторий с соответствующими участками маршрутной сети, для каждого звена формируется зависимость между величиной потока и временем прохождения. Интенсивность потока на конкретном участке маршрута определяется как совокупное число траекторий, которые его пересекли за установленный период. Продолжительность движения по соответствующему сегменту рассчитывается как суммарное время, затраченное всеми ВС на его преодоление.

Пусть сеть маршрутов ОВД задана как неориентированный граф $G = (V, E)$, в котором множество узлов (навигационных точек) обозначается как V , множество связей между ними – как E . Узлы обозначаются как $i = 1, \dots, n$, а связи – e_{ij} , в том случае, если звену принадлежат узлы i и j . A – матрица смежности графа G : $a_{ij} = 1$, если между i и j существует связь e_{ij} , иначе $a_{ij} = 0$.

Пусть $EE = \{EE_1, \dots, EE_t, \dots, EE_T\}$ – множество T OD-пар, где $EE_t = \{O_t, D_t\}$ – t -я пара с пунктом отправления O_t и пунктом назначения D_t . Пусть $D = \{d_1, \dots, d_t, \dots, d_T\}$ – вектор спроса, где d_t – спрос на t -ю OD-пару. Для t -й OD-пары имеется максимум R_t допустимых маршрутов, обозначаемых как $P_t^1, P_t^2, \dots, P_t^r, \dots, P_t^{R_t}$. Поток на маршруте P_t^r обозначается f_{tr} . Пусть множество всех маршрутов сети обозначается как $P = \{P_1, P_2, \dots, P_T\}$. Звено e принадлежит маршруту p , если маршрут его пересекает. Функция $\delta_{(tr,i,j)} = 1$, если звено $e_{ij} \in P_t^r$, иначе $\delta_{(tr,i,j)} = 0$. Матрица задержек L содержит элементы $l_{ij} = c_{ij}^0 + c_{ij}^1 x_{ij}$ – функция стоимости для связи e_{ij} , где x_{ij} – поток на этой связи.

Задача оптимизации для модели UE (равновесия пользователей):

$$UE: \min_{\substack{X=\{x_{ij}\} \\ i,j=1,\dots,n}} F_{UE}(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_0^{x_{ij}} a_{ij} l_{ij}(t) dt$$

при

$$f_{tr} \geq 0$$

$$\sum_{r=1}^{R_t} f_{tr} = d_t$$

$$\sum_{t=1}^T d_t = D$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^{R_t} \delta(tr, ij) f_{tr} = x_{ij}$$

$$l_{ij}(x_{ij}) = c_{ij}^0 + c_{ij}^1 x_{ij}$$

(1)

В этой задаче f_{tr} – поток на маршруте P_t^r . Условие $f_{tr} \geq 0$ обеспечивает неотрицательность потока, а $\sum_{r=1}^{R_t} f_{tr} = d_t$ – подтверждает, что поток на каждом участке между t -ми OD-парами соответствует спросу. Условие $\sum_{t=1}^T d_t = D$ означает, что сумма значений потоков по всем OD-парам должна быть равна совокупному спросу на использование исследуемой маршрутной сети в заданных пространственно-временных условиях. Условие $\sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^{R_t} \delta(tr, ij) f_{tr} = x_{ij}$ конвертирует потоки на маршрутах в потоки на звеньях. Минимизация F_{UE} даёт оптимальное распределение потоков в условиях так называемого эгоистичного выбора маршрутов перевозчиками.

Задача оптимизации для модели SE (равновесия системы):

$$SE: \min_{\substack{X=\{x_{ij}\} \\ i,j=1,\dots,n}} F_{SE}(X) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} l_{ij}(x_{ij})$$

при

$$f_{tr} \geq 0$$

$$\sum_{r=1}^{R_t} f_{tr} = d_t$$

$$\sum_{t=1}^T d_t = D$$

$$\sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^{R_t} \delta(tr, ij) f_{tr} = x_{ij}$$

$$l_{ij}(x_{ij}) = c_{ij}^0 + c_{ij}^1 x_{ij}$$

(2)

Подобно постановке задачи для равновесия пользователей (UE), задача системного равновесия (SE) формулируется в уравнении (2) и сопровождается теми же ограничениями, что и уравнение (1). Модель SE отражает ситуацию, при которой пользователи маршрутизируют свои потоки согласованно, стремясь к оптимизации общей эффективности сети. Минимизация функционала F_{SE} в этом случае приводит к нахождению оптимального

распределения потоков по маршрутной сети, обеспечивающего минимальные суммарные издержки.

Задача оптимизации по равновесию Браеса (BE) близка к модели SE, но дополняется дополнительным ограничением, которое гарантирует, что для каждого пользователя стоимость выбранного маршрута не превысит стоимости, наблюдаемой при равновесии пользователей (UE). Это условие обеспечивает, что новые решения не ухудшают положение ни одного участника по сравнению с классическим равновесием UE.

Задача оптимизации для модели BE:

$$\begin{aligned}
 BE: \min_{\substack{X=\{x_{ij}\} \\ i,j=1,\dots,n}} F_{BE}(X) &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_{ij} l_{ij}(x_{ij}) \\
 \text{при} \\
 f_{tr} &\geq 0 \\
 \sum_{r=1}^{R_t} f_{tr} &= d_t \\
 \sum_{t=1}^T d_t &= D \\
 \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^{R_t} \delta(tr, ij) f_{tr} &= x_{ij} \\
 l_{ij}(x_{ij}) &= c_{ij}^0 + c_{ij}^1 x_{ij} \\
 u_{tr}^* &\geq u_{tr}
 \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь u_{tr}^* и u_{tr} – стоимость маршрута P_t^r по результатам оптимизации F_{UE} и F_{BE} соответственно. Это условие гарантирует, что оптимальное решение F_{BE} не ухудшает стоимость маршрута ни для одного пользователя (никто не в проигрыше), но некоторые могут выиграть.

Минимизируя эти три функции, получаем соответствующую матрицу распределения потоков X . Элемент x_{ij} – оптимальный поток по звену e_{ij} в маршрутной сети.

В результате оптимизации трёх целевых функций (UE, SE и BE) формируются три матрицы распределения потоков: X^{UE} , X^{SE} и X^{BE} . В этом разделе определяются потенциальные звенья, которые могут вызывать парадокс Браеса, путём сравнения элементов этих матриц.

В частности, если выполняются следующие условия:

$$\begin{aligned}
 |x_{ij}^{SE} - x_{ij}^{BE}| &\rightarrow 0 \\
 x_{ij}^{UE} &\geq \delta x_{ij}^{BE}
 \end{aligned} \tag{4}$$

то звено e_{ij} считается потенциальным звеном, вызывающим парадокс.

Первое условие требует, чтобы значения x_{ij}^{SE} и x_{ij}^{BE} были близки друг к другу. X^{UE} отражает поведение пользователей, принимающих «эгоистичные» решения при выборе маршрута, аналогично равновесию Нэша в теории игр, X^{SE} – это глобально оптимальное решение, а X^{BE} – локально оптимальное, согласованное с условиями BE. Во втором условии параметр δ определяет

чувствительность к отклонению между x_{ij}^{UE} и x_{ij}^{BE} . Согласно описанию парадокса Браеса, если разница между x_{ij}^{UE} и x_{ij}^{BE} значительна, это означает, что поток по звену e_{ij} может негативно влиять на стоимость полёта. Таким образом, такое звено считается потенциальным источником парадокса.

В данной работе предполагается, что если разница между x_{ij}^{UE} и x_{ij}^{BE} превышает один порядок величины, то соответствующее звено e_{ij} рассматривается как потенциально вызывающее парадокс Браеса в сети. Следовательно, в разделе с примерами значению δ присвоено значение $\delta = 10$.

На основании указанных условий можно определить все звенья, вызывающие парадокс Браеса. Затем проводится повторная оптимизация функции F_{UE} в новой сети, из которой исключены потенциальные связи, и строится новая матрица распределения потоков $X^{UE'}$. Если при этом выполняется следующее условие: $F_{SE}(X^{UE'}) < F_{SE}(X^{UE})$, то это означает, что удаление этих звеньев из сети снижает общую стоимость перевозки, а значит, они действительно вызывают парадокс Браеса в данной маршрутной сети.

Дискуссия

С момента публикации в 1968 году парадокс Браеса стал объектом пристального внимания в сфере исследования наземных транспортных сетей. Он изучался как в классической форме, так и в более обобщённом представлении. Было показано, что данный феномен имеет высокую вероятность возникновения в случайных, естественным образом сформированных сетях [Bittihn et al., 2021]. Кроме того, при заданной интенсивности движения было доказано, что в большинстве сетей можно обнаружить набор связей, удаление которых приводит к снижению общего времени в пути при пользовательском равновесии.

В сетях, где каждая связь описывается неубывающей функцией потока (так называемой функцией стоимости), пользователи, действуя независимо, выбирают маршруты с минимальными затратами – такой тип распределения называется пользовательским равновесием (User Equilibrium, UE), или Первым принципом Вардропы. В то же время существует альтернативное распределение, при котором пользователи действуют скоординированно, минимизируя совокупные затраты всей системы. Такой поток называется системным равновесием (System Equilibrium, SE), соответствующим Второму принципу Вардропы [Detecting Braess Routes..., 2021].

Добавление новой связи в транспортную сеть, как правило, предполагается как мера для повышения эффективности. Однако в реальности перераспределение маршрутов при переходе к новому пользовательскому равновесию может привести к увеличению общего времени в пути. Это связано с тем, что пользователи оптимизируют собственные маршруты, не учитывая влияние на других участников сети. Следовательно, парадокс Браеса является следствием индивидуалистического поведения. В случае использования SE такой эффект бы не возник.

Как ранее отмечалось, помимо расчёта функций стоимости для всех связей маршрутной сети, для идентификации парадокса Браеса требуется также информация о парах «точка входа – точка выхода» (OD-парах), а также объёмах соответствующего спроса на авиаперевозки [Maniket al., 2022].

Используя данные ВРЛ и АЗН-В, можно определить рубежи входа и выхода каждого рейса в границах МВЗ. Путём сопоставления траекторий с сетью маршрутов выделяются точки, ближайšie к фактическому входу и выходу, и эти точки фиксируются как соответствующая OD-пара. Повторив данный процесс для всех рейсов за определённый интервал времени, формируется полный список OD-пар, актуальных для анализируемой маршрутной сети. Суммарный поток рассчитывается как агрегированная величина всех потоков между этими OD-парами.

Алгоритм выявления парадокса Браеса в маршрутной сети строится на двух основных этапах. На первом этапе формируются и минимизируются целевые функции моделей, соответствующих различным режимам распределения движения – равновесию пользователей (UE), системному равновесию (SE) и равновесию по Браесу (BE). Это позволяет получить три набора оптимальных решений, отражающих различные сценарии движения. На втором этапе проводится сравнительный анализ этих решений для выявления тех звеньев (маршрутов), присутствие которых вызывает ухудшение эффективности всей сети – т.е. тех, что обуславливают проявление парадокса Браеса [Mahmoud et al., 2021].

Таким образом, для формализации задачи обнаружения парадокса в сети маршрутов ОВД необходимо определить оптимальное распределение потоков в соответствии с одним из выбранных принципов. В научной литературе соответствующие модели UE, SE и BE обычно описываются как задачи математической оптимизации [Modifying link capacity..., 2022]. Далее будет представлена формализация этих задач с использованием необходимых обозначений и определений.

Тем не менее, исходный метод обладает рядом ограничений. Например, он использует статическую схему, при которой анализ проводится на основе фиксированного входного потока и заранее заданного распределения маршрутов. В такой модели отсутствует учёт временных флуктуаций потока, а маршруты остаются неизменными независимо от загрузки отдельных участков сети. Однако в реальных условиях входящий поток не детерминирован, он подвержен изменениям из-за метеоусловий, непредвиденных задержек и вариативности планов полётов. Поэтому однократный расчёт эффекта от удаления ребра может быть неустойчивым: в одном сценарии удаление полезно, в другом – вредно, что в сумме требует внесения оптимизационных изменений в рассмотренный подход.

Улучшение предлагаемого подхода заключается в переходе от статической к динамической модели, способной учитывать временные особенности функционирования маршрутной сети. В предлагаемой модели на основе динамического назначения эти ограничения снимаются. Поток ВС моделируется как поступающий во времени с переменной интенсивностью и

случайными всплесками, характерными для реальных условий ВД. Каждое судно в модели выбирает маршрут не заранее, а в момент входа, исходя из текущей загрузки маршрутов и минимального суммарного времени полёта. Это позволяет гибко учитывать всплески, перегрузки отдельных рёбер и их влияние на задержки в системе.

Кроме того, если в статической модели задержка рассчитывается как общее итоговое значение, то в динамической модели она агрегируется по временным слотам, обеспечивая более точную картину изменения состояния сети. Такой подход позволяет выявлять узкие места, возникающие не только из-за структуры сети, но и вследствие временных концентраций ВС, и предлагать более надёжные меры управления на основе временной чувствительности. Именно это делает предлагаемую модель более устойчивой, реалистичной и применимой для анализа парадокса Браеса и задачи устойчивого удаления.

Результаты

Вновь обратимся к графу G множеством точек V и рёбрами E . Каждое ребро $e \in E$ характеризуется базовой стоимостью a_e (время прохождения при отсутствии задерживающих факторов), коэффициентом задержки α_e (чувствительность к нагрузке) и функцией потока $f_e(t)$ (количество ВС на ребре в момент времени t). Для учёта динамики трафика во времени и его влияния на задержки используется зависящая от времени функция стоимости для каждого ребра:

$$T_e(t) = a_e + \alpha_e \cdot f_e(t), \quad (5)$$

где $T_e(t)$ – эффективное время прохождения ребра e в момент времени t , $f_e(t)$ – интенсивность потока на этом сегменте (число рейсов за интервал). Вместо статического распределения маршрутов, здесь используется динамическое назначение движения, то есть полёты поступают в систему распределённо во времени (входящие рейсы распределены по слотам) и каждое ВС выбирает маршрут, минимизируя его суммарную стоимость во времени. Полная стоимость маршрута $r = (e_1, e_2, \dots, e_k)$ определяется как:

$$T_r(t) = \sum_{i=1}^k T_{e_i}(t + \Delta t_i), \quad (6)$$

где Δt_i – накопленное время до достижения i -го ребра, а $T_{e_i}(t + \Delta t_i)$ – стоимость с учётом текущего потока на ребре в момент входа.

Такая динамическая модель, помимо учёта реальной загрузки маршрутной сети, позволяет выявить скопления ВС, возникающие в промежуточных узлах при высокой плотности движения, и более точно определяет вклад каждого ребра в задержку. Например, в сети с маршрутами:

- A → B → D
- A → C → D
- A → C → B → D (дополнительный путь),

при увеличении числа рейсов через C → B, время на этом ребре может возрастать, что сделает маршруты с его использованием неэффективными во

времени. ДТА автоматически перераспределит поток в пользу менее загруженных маршрутов, демонстрируя, как парадокс Браеса проявляется во временной динамике. Это проиллюстрировано на графике задержек на рёбрах сети во времени (рисунок 4). Рассмотрим сеть с 4 узлами (A, B, C, D), соответственно её рёбра: $A-B, B-C, A-C, C-D, B-D$. По оси x отложены временные интервалы (для будущего эксперимента 10-минутные слоты в течение часа), по оси у отложены суммарные задержки в минутах на каждом ребре.

Задержка на ребре является его функцией стоимости (5). Поток на ребре определяется:

$$f_e(t) = \sum_{r \in R_e} \delta_{e,r} \cdot s_r(t), \quad (7)$$

где R_e – маршруты, проходящие через ребро e , $\delta_r \in \{0;1\}$ – индикатор принадлежности ребра маршруту r , $s_r(t)$ – поток по маршруту r в момент времени t . Тогда итоговая задержка по маршруту:

$$T_r(t) = \sum_{e \in r} T_e(t). \quad (8)$$

Это позволяет определить, какие маршруты перегружены в конкретные моменты времени и как задержки накапливаются из-за плотного движения.

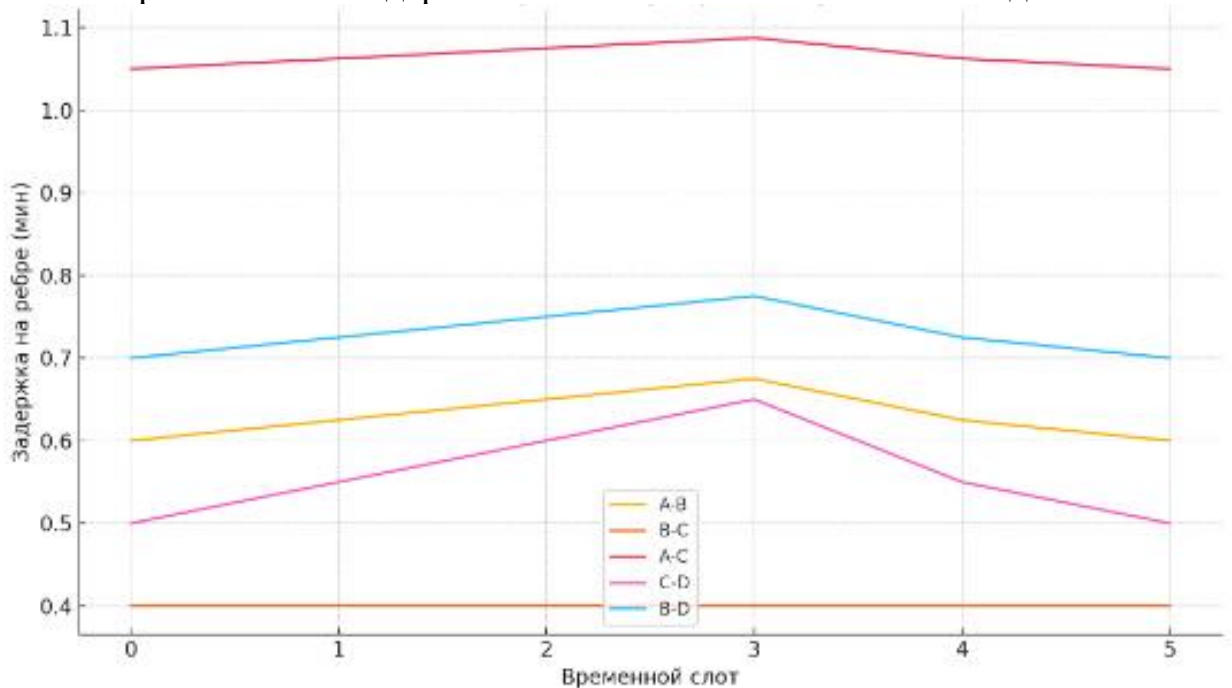


Рисунок 4 – Задержка на рёбрах во времени

Хорошо видно увеличение задержек во временных интервалах при пиковом движении (в середине) из-за накопления потока.

Следующей целью является решение задачи устойчивого удаления ребра, то есть нахождение такого ребра e^* , удаление которого приводит к наименьшему ухудшению (а в идеале – к улучшению) характеристик сети во всех возможных сценариях движения:

$$e^* = \arg \min_{e \in E} \max_{\omega \in \Omega} [D_e^\omega - D_0^\omega], \quad (9)$$

где E – множество рёбер, $\omega \in \Omega$ – сценарии воздушной обстановки (разные входные профили), D_0^ω – задержка в исходной сети при сценарии ω , D_e^ω – задержка после удаления ребра e при сценарии ω , $D_e^\omega - D_0^\omega$ – дельта задержки, \max – худший случай по сценариям (robust analysis), argmin – выбор ребра с наименее худшим эффектом. Алгоритм реализации следующий: первым шагом формируется базовый граф G сети маршрутов, вершины – точки маршрута, рёбра – сегменты маршрутов. Далее создаются сценарии воздушной обстановки, с использованием вероятностного распределения входных потоков и генерацией N сценариев с различной интенсивностью движения. Поочерёдно удаляется каждое ребро из сети и для каждого сценария вычисляется $\Delta_e^\omega = D_e^\omega - D_0^\omega$. Далее строится график чувствительности, где каждая точка – эффект от удаления ребра в одном сценарии, и выбирается ребро e^* с наименьшей максимальной задержкой $e^* = \operatorname{argmin}_e (\max_\omega \Delta_e^\omega)$. Финальным шагом интерпретируется: если $\Delta_{e^*}^\omega < 0$ во всех сценариях – это идеальный кандидат на удаление (парадокс Браеса), если $\Delta_{e^*}^\omega \approx 0$ – нейтральный эффект, можно использовать в случае перегрузки, если разброс по ω слишком велик – удалить небезопасно, результат неустойчив.

Такой подход учитывает неопределённость и переменность движения и позволяет избегать ошибочных выводов, полученных на основании одного сценария.

Ранее была изложена методика выявления парадокса Браеса на примере маршрутной сети ОВД с применением данных траекторий полётов с использованием модели на основе динамического назначения и устойчивым удалением звеньев. Для оценки эффективности предложенного подхода в данном разделе приводится практическое исследование, основанное на анализе маршрутной сети МВЗ, используя информацию, полученную от ВРЛ и АЗН-В за период с 1 июня по 30 декабря 2023 года. На рисунке 5 представлена схема маршрутной сети МВЗ, которая включает 206 ключевых узлов и 372 основных звена.

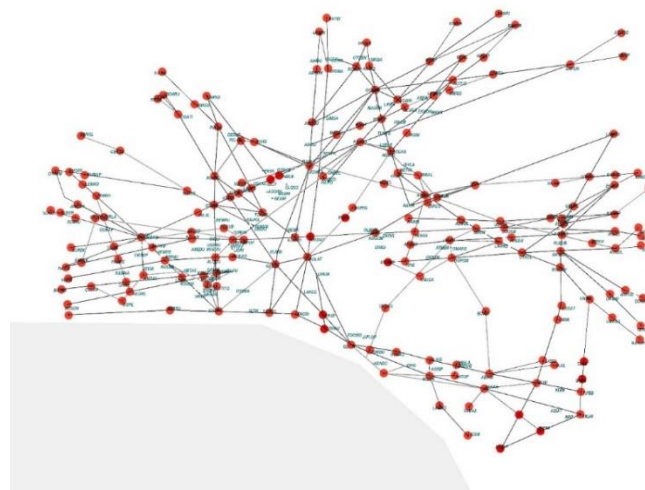
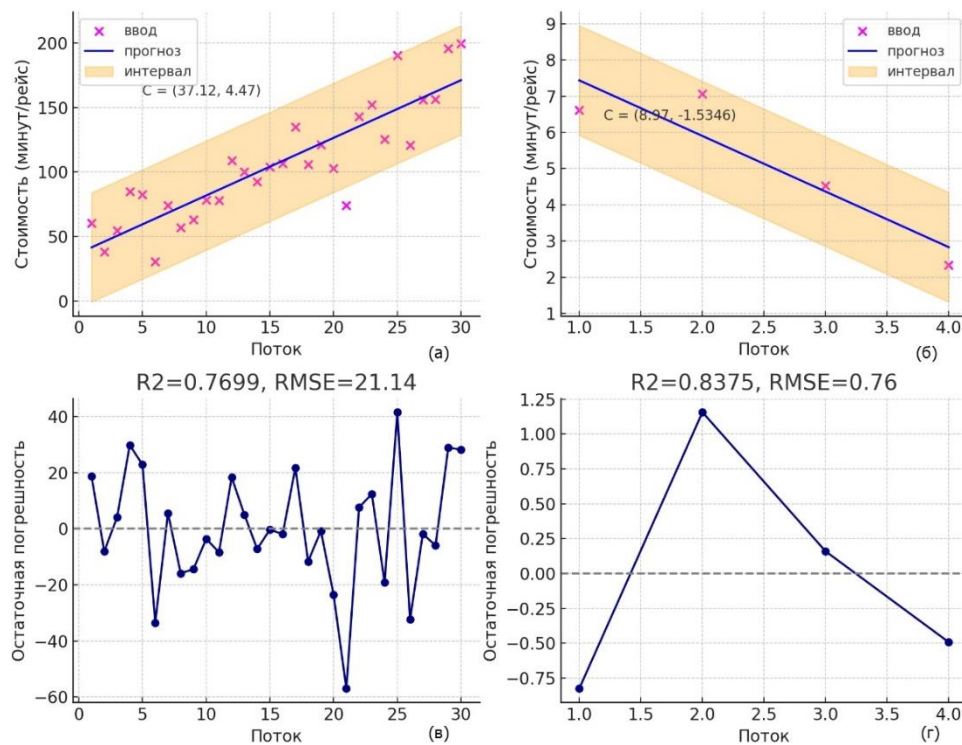


Рисунок 5 – Структура маршрутной сети МВЗ

В рамках данного исследования отобраны полёты, выполняемые на эшелонах 290-390. С помощью процедуры регистрации этих траекторий были построены зависимости «поток–продолжительность» для всех ключевых звеньев маршрутной сети МВЗ. Регистрация велась по каждому маршруту сети в различные временные интервалы суток. Итоговые данные, собранные за полугодовой период, усреднялись и применялись для аппроксимации функций стоимости на отдельных звеньях маршрутов.

Как показано на рисункеб (а), в некоторые дни по конкретному маршруту проходит свыше 30 рейсов. Матрица функций стоимости L аппроксимируется линейной функцией вида $y = c_0 + c_1x$. Он демонстрирует чёткую линейную зависимость между потоком и стоимостью для ребра с перегрузкой: $L(x) = c_0 + c_1x$, где $c_1 > 0$. Эта ситуация характерна для ребра, чувствительного к росту движения. Рисунок 6 (б) показывает пример устойчивого ребра, слабо реагирующего на изменение потока. Низкий наклон линии и высокая устойчивость подтверждаются $R^2 \approx 0.84$. Рисункиб (в) и б (г) отображают остаточную погрешность для обеих моделей. Видно, что даже при высокой линейности (левый нижний) вариации задержек существенны ($RMSE \approx 21$), что указывает на необходимость учёта временной динамики, вероятности и сценариев в реальных условиях.



Рисунокб – Функции стоимости, смоделированные в соответствии с дополненной динамической моделью (DTA)

Важно отметить, что функция стоимости связи отражает зависимость между интенсивностью движения и суммарным временем полёта по данному участку. При известном значении потока на звене (например, 2–3 ВС) по функции стоимости можно оценить длительность пролёта по

соответствующему маршруту. Таким образом, осуществляется распределение потоков по маршрутам для последующего анализа парадокса Браеса.

С использованием функций стоимости и суточных данных о движении по паре OD-парам в рамках сети МВЗ, становится возможной минимизация целевых функций $F_{UE}(X)$, $F_{SE}(X)$ и $F_{BE}(X)$. Этот процесс позволяет получить три соответствующих оптимальных решения: X^{UE} , X^{SE} и X^{BE} , каждое из которых представляет распределение потоков, соответствующее своей модели равновесия при заданном уровне транспортной потребности. Подставляя X в $F_{SE}(X)$, можно получить общую стоимость перемещения в маршрутной сети.

На рисунке 7 показаны различия между общей стоимостью при моделях UE и SE, а также между UE и BE. Парадокс Браеса может возникнуть, если разница между этими значениями значительна. Если разница мала, это означает, что равновесие Нэша X^{UE} близко к глобальному оптимуму X^{SE} или равновесию по Парето X^{BE} . Видно, что в некоторые дни различия значительны, а в другие – не превышают 10 минут.

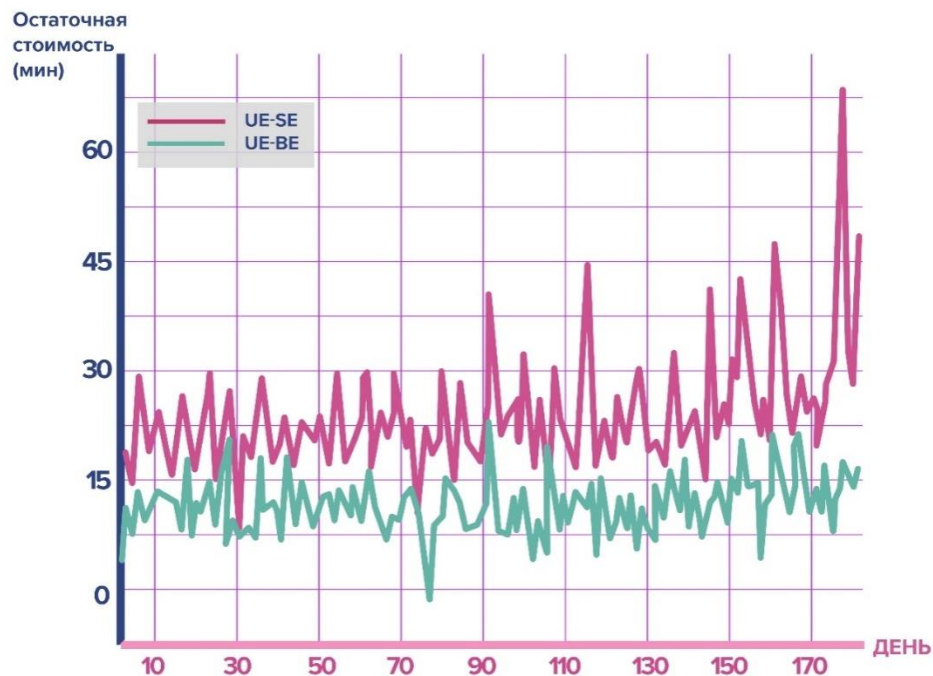


Рисунок 7 – Сравнение общей стоимости перемещения в МВЗ по моделям UE, SE и BE

Рисунок 8 даёт обобщённое представление об общей стоимости для трёх моделей. Для определения конкретных звеньев, вызывающих парадокс Браеса, необходимо сравнить оптимальные решения X^{UE} , X^{SE} и X^{BE} . Так как каждое из решений – это матрица, для упрощения сравнения они преобразуются в три вектора: $x_1 = \{x_1^1, x_2^1, \dots, x_{372}^1\}$, $x_2 = \{x_1^2, x_2^2, \dots, x_{372}^2\}$ и $x_3 = \{x_1^3, x_2^3, \dots, x_{372}^3\}$, где x_i – поток, меняющийся во времени, на i -й связи МВЗ.

Статистические данные за все дни аппроксимируются. На рисунке изображено распределение оптимальных потоков x_1 , x_2 и x_3 для моделей UE, SE и BE. Если $x_i^1 = x_i^2 = x_i^3$, соответствующие звенья не отображаются для

ясности. Длина цветных полос указывает величину потока по соответствующему звену.

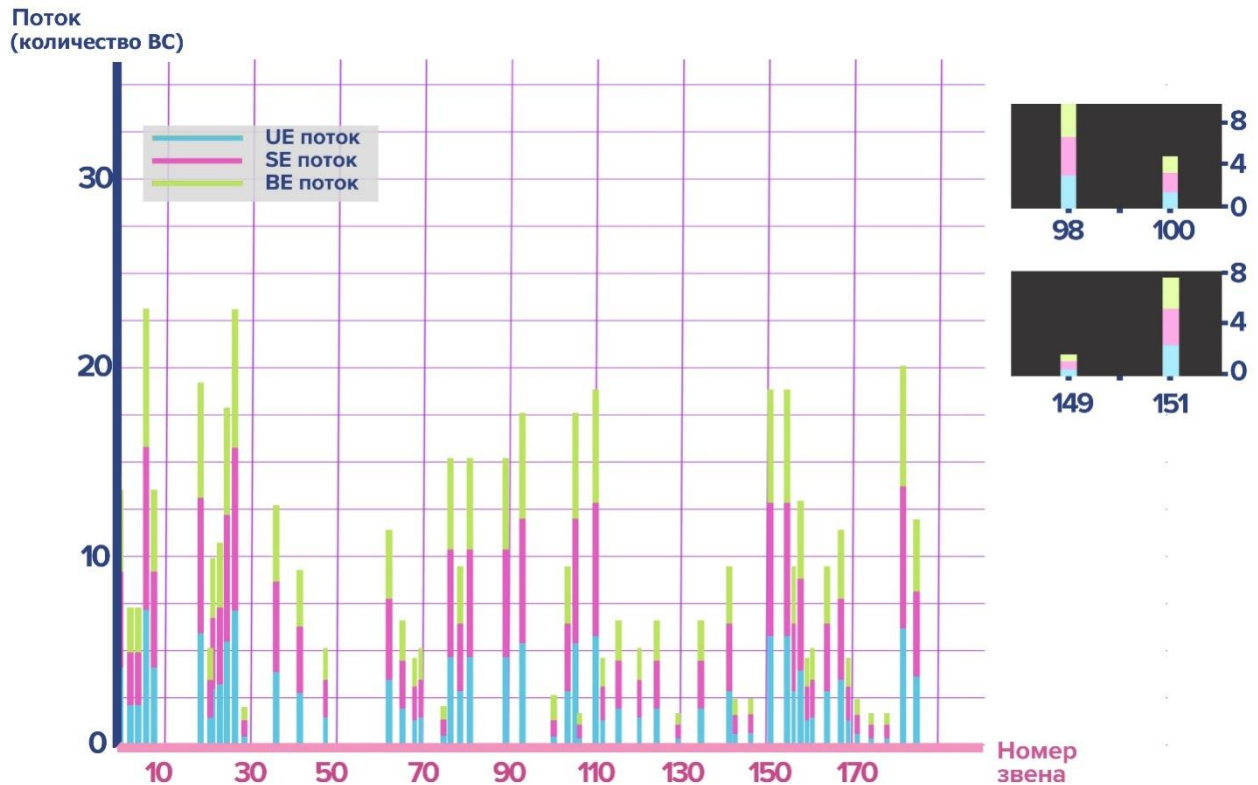


Рисунок 8 – Оптимальные потоки по каждому звену в МВЗ для моделей UE, SE и BE в 17-й день

Из рисунка 8 видно, что на большинстве звеньев потоки по трём моделям близки. Только на звеньях 99 (EKSER - KOKAD) и 150 (INLEN - IPSIL) потоки отличаются: $x_{99}^1 = x_{150}^1 = 0.2843$, а $x_{99}^2 = x_{99}^3 = x_{150}^2 = x_{150}^3 = 0$, что соответствует условию (11). Следовательно, звенья 99 и 150 рассматриваются как потенциально вызывающие парадокс Браеса.

Соответствующие точки этих звеньев представлены на рисунке 9. Чтобы проверить, действительно ли они вызывают парадокс, звенья EKSER – KOKAD и INLEN – IPSIL удаляются из сети МВЗ и заново проводится оптимизация $F_{UE}(X)$. После этого общая стоимость на маршрутах пересчитывается. Результаты показаны на рисунке 10.

До удаления указанных звеньев суммарная продолжительность полётов составляла 10783,25 минуты. После их исключения этот показатель уменьшился на 4,9%, достигнув 10254,88 минут. Данный факт свидетельствует о том, что звенья EKSER – KOKAD и INLEN – IPSIL действительно становятся источником парадокса в указанной сети на эшелонах 290-390.

Здесь TC_1 и TC_2 представляют собой суммарные стоимости, полученные в результате минимизации $F_{UE}(X)$ до и после удаления звеньев, вызывающих парадокс Браеса. $SC = TC_1 - TC_2$ – это экономия стоимости.

График чувствительности (robust removal) показывает (рисунок 10), как меняется суммарная задержка при удалении каждого ребра в разных

формируют практико-ориентированную стратегию оптимизации ВП, не опирающуюся на статические предположения.

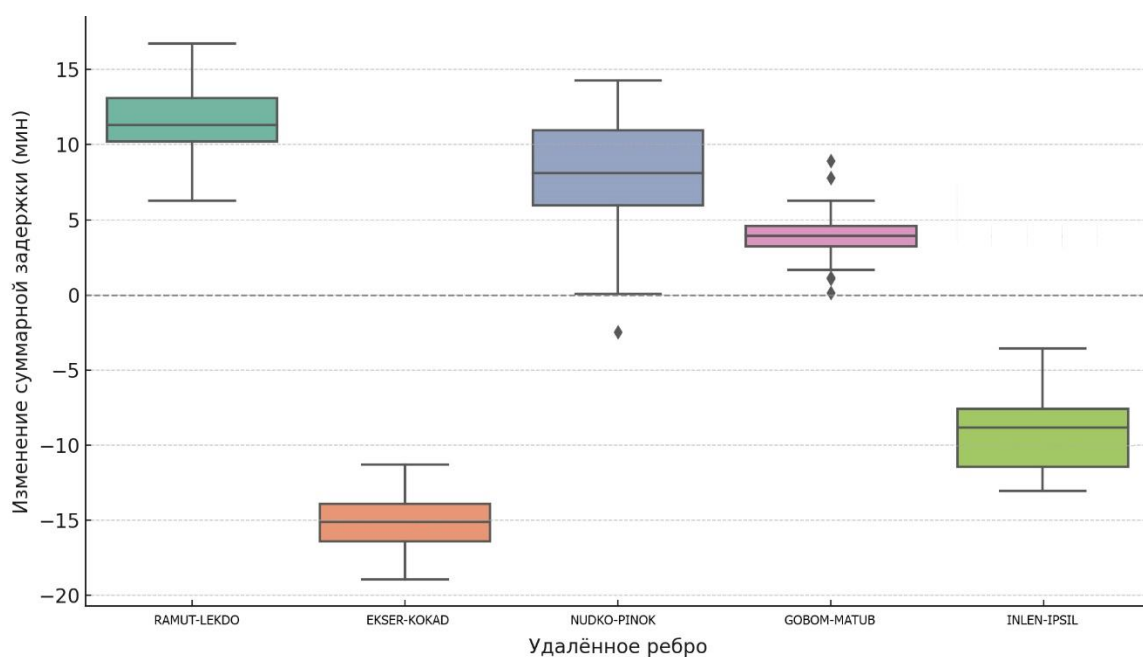


Рисунок 10 – График чувствительности удаления рёбер

Таблица 2 – Результаты обнаружения парадокса Браеса в МВЗ

День	Движение (кол-во ВС)	Звено	ТС1 (мин)	ТС2 (мин)	SC (мин)	SC/ТС1(%)
2	52	71	2031.3	2025.11	6.19	0.305
18	56	29	3540.1	3518.205	21.895	0.619
26	81	148	5168.993	5160.321	8.672	0.168
33	33	153	1130.11	1122.005	8.105	0.717
42	90	46	7119.211	7100.93	18.281	0.257
76	114	24	14104.770	14101.934	2.837	0.020
90	121	116	10638.291	10406.842	231.449	2.180
92	108	189	10720.493	10718.720	1.773	0.017
99	76	168	6849.840	6826.989	22.850	0.334
107	87	75	8340.712	8294.300	46.412	0.557
122	113	180	8447.230	8440.621	6.609	0.078
174	121	117	8672.340	8338.702	333.637	3.848

Закключение

В данной работе рассмотрен феномен парадокса Браеса в контексте ОрВД и предложен расширенный подход к оптимизации структуры маршрутной сети. На основе анализа статьи [Dynamictrafficnetworkmodel ..., 2014] подтверждена идея о том, что удаление определённых рёбер может контринтуитивно снижать суммарные задержки за счёт перераспределения потоков и устранения локальных перегрузок. Однако статическая постановка задачи, принятая в оригинальной статье, имеет существенные ограничения,

связанные с отсутствием временной динамики, неопределённости и реалистичных операционных условий.

В исследовании предложено более универсальное решение, основанное на динамическом назначении движения и робастной оценке удаляемости рёбер. В отличие от статической модели, ДТА позволяет учитывать реальную изменчивость движения во времени, включая пики нагрузки и нестабильность входящих потоков. Проведённый эксперимент показал, что при моделировании на простом маршрутизированном графе и использовании профиля спроса по временным слотам возможно наблюдать эффект парадокса Браеса даже в условиях временной динамики. Удаление рёбер, таких как INLEN – IPSIL, может привести к снижению суммарных задержек в системе, особенно в сценариях с перегрузкой.

Дополнительно, с использованием подхода устойчивого удаления была проведена оценка чувствительности удаления каждого ребра к различным сценариям изменения движения. Это позволило выделить те рёбра, чьё удаление не только снижает задержки в среднем, но и остаётся эффективным в наихудших случаях. Такой подход особенно актуален для реальных систем ОВД, где требуется принимать решения с учётом неопределённости (например, из-за погодных условий или неравномерного распределения рейсов).

В результате продемонстрировано, что использование ДТА в связке с робастной оптимизацией может служить практическим инструментом для стратегического управления маршрутной структурой. Полученные результаты могут быть использованы при проектировании и оптимизации новых маршрутов, а также при адаптивной модификации сети в условиях перегрузки. В будущем планируется расширение модели на широкий спектр маршрутных сетей, интеграция с системами прогнозирования потоков и тестирование на реальных данных из открытых источников, таких как EUROCONTROL или FAA TFMS.

Таким образом, работа не только подтверждает применимость парадокса Браеса к маршрутным сетям, но и предлагает методы, делающие возможным его практическое использование в условиях динамики, неопределённости и сложных операционных ограничений. Дополнения, предложенные в работе, позволяют существенно повысить надёжность управления маршрутной сетью за счёт учёта временной динамики и вариативности движения. Использование модели динамического назначения маршрутов и задачи устойчивого удаления рёбер выявляет скрытые эффекты перегрузки и повышает точность оценки вклада каждого сегмента, снижая риск ошибочного вмешательства в структуру сети.

Библиографический список

Веремей Е.И. Алгоритмы оптимизации маршрутов движения с учётом погодных условий / *Е. И. Веремей, М. В. Сотникова //International Journal of Open Information Technologies.* 2016. 4(3). С. 45-53. EDN VOQQT D

- Елисеев Б. П. Влияние интенсивности воздушного движения на задержки рейсов / Б. П. Елисеев, В. В. Воробьев, А. С. Харламов // *Мир транспорта*. 2016. Т. 14, № 4. С. 168-175. EDNYISBHB
- Печенежский В.К. Особенности организации планирования использования воздушного пространства в Российской Федерации на примере Московской воздушной зоны / В. К. Печенежский, Е. К. Чуви́ковская // *Научный вестник МГТУ ГА*. 2023. 26(6). С. 47-57. EDNVJOFJZ
- Applying complexity science to air traffic management / A. Cook, H. Blom, F. Lillo, R. Mantegna, S. Micciché, S. Rivas, R. Vázquez, M. Zanin // *Journal of Air Transport Management*. 2015. Vol. 42. P. 149-158. DOI 10.1016/j.jairtraman.2014.09.011.
- Bertsimas D. The air traffic flow management problem with enroute capacities /D. Bertsimas, S. Patterson// *Operations Research*. 1998.46(3).pp. 406-422.DOI DOI: 10.1287/opre.46.3.406
- Bittihn S. The effect of modern traffic information on Braess' paradox /S. Bittihn, A. Schadschneider // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2021.571. 125829. DOI 10.1016/j.physa.2021.125829.
- Detecting Braess Routes: an Algorithm Accounting for Queuing Delays With an Extended Graph / M. Burov, C. Kizilkale, A. Kurzhanskiy, M. Arcak// *Intelligent Transportation Systems Conference (ITSC)*. 2021. Pp. 2125-2130. DOI 10.1109/ITSC48978.2021.9564775.
- Dynamic cost indexing – Managing airline delay cost /A. Cook, G. Tanner, V. Williams., G. Meise// *Journal of Air Transport Management*. 2009. 15(1). pp. 26-35.DOI 10.1016/j.jairtraman.2008.07.001.
- Dynamic traffic network model and time-dependent Braess' paradox / J. Zhao, Z. Gao, B. Jia, X. Guo, H. Sun // *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2014. pp. 1-10. Article ID 802129. DOI 10.1155/2014/802129.
- Eurocontrol manual for airspace planning. Common guidelines. Second Edition / European organization for the safety of air navigation. 2003. 432 p.
- ICAO. Air traffic services planning manual. 1st ed. / International Civil Aviation Organization, 1984.
- Mahmoud N. A. A Modified Dynamic Programming Approach for 4D Minimum Fuel and Emissions Trajectory Optimization / N. A. Mahmoud, B. H. Al-Hindawi, M. Y. Hasan// *Aerospace*. 2021.Vol.8, № 5. Article 135. DOI 10.3390/aerospace8050135.
- Manik D. Predicting Braess' Paradox in Supply and Transport Networks /D. Manik, D. Witthaut, M. Timme// *ArXiv preprint*. 2022. arXiv:2203.10062. DOI 10.48550/arXiv.22053.14685.
- Modifying link capacity to avoid Braess Paradox considering elastic demand / A. Wang, Y. Tang, Y. Mohmand, P. Xu // *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*. 2022. p. 605. 128002. DOI <https://doi.org/10.1016/j.physa.2022.127951>.
- Rosenberger J.M. Rerouting aircraft for airline recovery / J. M. Rosenberger, E. L. Johnson, G. L. Nemhauser// *Transportation Science*. 2004. № 38(2).pp. 162-182. DOI 10.1287/trsc.37.4.408.23271.
- Tcheukam S. A. Mean-field-type games on airline networks and airport queues: Braess paradox, its negation, and crowd effect /A. S. Tcheukam, H. Tembine // *Dynamic Games and Applications*. 2016.11(1). pp. 83-109. DOI 10.1109/SSD.2016.7473658.
- Vickrey W.S. Congestion theory and transport investment // *The American Economic Review*. 1969.59(2). p. 251-260.

References

- Bertsimas D., Patterson S.S. (2000). The air traffic flow management problem with enroute capacities. *Operations Research*.48(1): 156-168.
- Bittihn S., Schadschneider A. (2021). The effect of modern traffic information on Braess' paradox. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*.571: 125829.

- Burov M., Kizilkale C., Kurzhanskiy A., Arcak M. (2021). Detecting Braess Routes: an Algorithm Accounting for Queuing Delays With an Extended Graph. *IEEE Intelligent Transportation Systems Conference (ITSC)*. 2125-2130.
- Cook A. J., Blom H., Lillo F., Mantegna R., Micciché S., Rivas S., Vázquez R., Zanin M. (2015). Applying complexity science to air traffic management. *Journal of Air Transport Management*.42: 149-158.
- Cook A., Tanner G., Williams V., Meise G. (2009). Dynamic cost indexing – Managing airline delay costs. *Journal of Air Transport Management*.15(1): 26-35.
- Eliseev B.P., Vorobyev V.V., Kharlamov A. S. (2016). Influence of air traffic on flight delays. *Mir transporta*.14 (4):168-175.
- Eurocontrol manual for airspace planning. Common guidelines. Second Edition / European organization for the safety of air navigation. 2003. 432 p.
- ICAO. Air traffic services planning manual, 1st ed. *International Civil Aviation Organization*. 1984.
- Mahmoud N. A., Al-Hindawi B. H., Hasan M. Y. (2021). A Modified Dynamic Programming Approach for 4D Minimum Fuel and Emissions Trajectory Optimization // *Aerospace*. 8(5). Article 135.
- Manik D., Witthaut D., Timme M. (2022). Predicting Braess' Paradox in Supply and Transport Networks. *ArXiv preprint*. arXiv:2203.10062.
- Pechenezhsky V.K., Chuvikovskaya E.K.(2023).Features of airspace planning organization in the Russian Federation on the example of the Moscow airspace. *Scientific Bulletin of MSTU CA*. 26(6): 47–57.
- Rosenberger J.M., Johnson E.L., Nemhauser G.L. (2004). Rerouting aircraft for airline recovery. *Transportation Science*.38(2): 162-182.
- Tcheukam S. A., Tembine H. (2016). Mean-field-type games on airline networks and airport queues: Braess paradox, its negation, and crowd effect. *Dynamic Games and Applications*.11(1): 83-109.
- Veremey E.I., Sotnikova M.V.(2016).Optimal routing based on weather forecast. *International Journal of Open Information Technologies*. 4(3): 45-53.
- Vickrey W.S. (1969). Congestion theory and transport investment. *The American Economic Review*.59(2): 251-260.
- Wang A., Tang Y., Mohmand Y.T., Xu P. (2022). Modifying link capacity to avoid Braess Paradox considering elastic demand. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*.605: 128002.
- Zhao J., Gao Z., Jia B., Guo X., Sun H. (2014). Dynamic traffic network model and time-dependent Braess' paradox. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 1-10: Article ID 802129.