

УДК 621.391:621.396

ББК 39.57-5

DOI 10.51955/2312-1327_2024_2_134

МЕТОДИКА СИНТЕЗА ОПТИМАЛЬНОЙ ПО ВРЕМЕНИ ТРАЕКТОРИИ ПОЛЕТА БЕСПИЛОТНОГО ВОЗДУШНОГО СУДНА*

*Олег Николаевич Скрыпник,
orcid.org/0000-0002-2006-0428,
доктор технических наук, профессор
Белорусская государственная академия авиации,
ул. Уборевича, 77
Минск, 220096, Республика Беларусь
skripnikon@yandex.ru*

*Екатерина Викторовна Куриленко,
orcid.org/0009-0000-7280-6490,
аспирант
Белорусская государственная академия авиации,
ул. Уборевича, 77
Минск, 220096, Республика Беларусь
Balich1993@mail.ru*

Аннотация. В статье рассмотрены методика синтеза оптимальной траектории полета БВС и алгоритм системы управления полётом. Система и алгоритм разработаны для четырёхмерных (4D) операций на основе траекторий (ТВО) в контексте концепций CNS/АТМ и РВН, что позволит повысить операционную эффективность процессов навигации и пилотирования БВС. В работе представлена математическая модель объекта управления и алгоритмы формирования оптимальной по времени траектории полета. Также представлена оценка предложенной методики путем верификации и валидации программного обеспечения системы с помощью имитационного моделирования. Полученные результаты демонстрируют функциональные возможности системы управления по созданию оптимальных по времени профилей траекторий, удовлетворяющих эксплуатационным требованиям.

Ключевые слова: беспилотное воздушное судно (БВС), система управления, оптимальная траектория полета.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (грант Т23-029).

THE TIME-OPTIMAL SYNTHESIS TECHNIQUE FLIGHT PATHS OF AN UNMANNED AIRCRAFT

*Oleg N. Skrypnik,
orcid.org/0000-0002-2006-0428,
Doctor of Technical Sciences, Full professor
Belarusian State Academy of Aviation,
77, Uborevich str.
Minsk, 220096, Republic of Belarus
skripnikon@yandex.ru*

*Ekaterina V. Kurylenko,
orcid.org/0009-0000-7280-6490,
post-graduate student
Belarusian State Academy of Aviation,
77, Uborevich str.
Minsk, 220096, Republic of Belarus
Balich1993@mail.ru*

Abstract. The article considers the method of synthesis of an optimal UAV flight path and an algorithm of the flight control system. The system and algorithm are designed for four-dimensional (4D) trajectory-based operations (TBO) in the context of the CNS/ATM and PBN concepts, which will increase the operational efficiency of the UAV navigation and piloting processes. The paper presents a mathematical model of the control object and algorithms for forming a time-optimal flight path. An assessment of the proposed methodology is also presented by verifying and validating the system software using simulation modeling. The results obtained demonstrate the functional capabilities of the control system to create time-optimal profiles of trajectories that meet operational requirements.

Keywords: unmanned aerial vehicle (UAV), control system, optimal flight path.

Введение

Одна из характерных особенностей развития мировой авиационной транспортной системы состоит в бурном развитии беспилотной авиации, её интеграции в общее с пилотируемой авиацией воздушное пространство (ВП) при безусловном сохранении уровня безопасности полётов, достигнутого в пилотируемой авиации. Основным инструментом интеграции беспилотных воздушных судов (БВС) в общее ВП является совершенствование системы организации воздушного движения на основе технологий CNS (Communication, Navigation, Surveillance)¹ и в рамках концепции навигации, основанной на характеристиках (Performance Based Navigation, PBN) [Skrypnik, 2019]. Реализация принципов PBN позволит оптимизировать использование ВП всеми категориями пользователей, включая БВС, путем расчёта при планировании и выдерживании в процессе полета оптимальных (по протяжённости, времени, эффективности выполняемых операций и т. п.) траекторий. При этом предполагается возможность создания гибких траекторий с их привязкой к времени [Global TBO Concept (Version 0.11), 2019].

Задача планирования оптимальной траектории полета состоит в том, чтобы определить переменные, определяющие траекторию полета от исходного состояния к конечному заданному состоянию с учётом ограничений, минимизируя показатель качества [Расчет и анализ..., 1971]. Ограничения могут накладываться на значения допустимых пилотажных и навигационных параметров БВС, на прохождение траектории через определённые точки маршрута, на использование воздушного пространства (запретные зоны, зоны высокой турбулентности, грозовой деятельности и пр.).

¹ Системы CNS/ATM: учеб. пособие / Сост. В. А. Казаков. 2-е изд., перераб. и доп. Ульяновск: УВАУ ГА, 2008. 103 с.

Большинство разработанных к настоящему моменту методов решения терминальных задач [Белинская и др., 2014; Касаткина, 2013; Кузнецов, 2013; Levine et al., 1997] не дают возможности учёта ограничений, наложенных на состояние системы. Применение принципа максимума Понтрягина к решению терминальных задач при наличии ограничений на управления ведёт к получению управления, не являющегося непрерывным. Одним из возможных подходов к учёту ограничений на состояния в терминальных задачах является метод локальных вариаций [Крылов и др., 1966; Черноусько, 1965], применение которого может приводить к ограничениям на реализуемость траектории.

Вопросы концепции функционирования, архитектуры системы управления маловысотным беспилотным движением, алгоритмы оптимизации траекторий БВС рассмотрены в работе [Next Generation..., 2014a]. Здесь же предложена 4D модель траекторного движения БВС переменной массы, включающая шесть переменных состояния. Вопросы синтеза оптимальных траекторий полета БВС и результаты исследований при различных критериях оптимизации рассмотрены в [Ramasamy, 2014b]. Альтернативные подходы к построению оптимальных траекторий, использующие методы искусственного интеллекта, рассмотрены в работе [Hybrid..., 2022].

В настоящее время широкое распространение получили методы, основанные на преобразовании аффинных систем к регулярному каноническому виду при помощи замен переменных состояния, управления и независимой переменной [Крищенко, 2013; Фетисов, 2014; Hoffner et al., 2009; Li et al., 2015].

В данной работе ставится задача планирования оптимальной траектории полета БВС самолётного типа, включая этапы взлёта и полета по маршруту. Заданы векторы начального $\bar{x}_0 = [V_0, \theta_0, \psi_0, H_0, L_0, Z_0]^T$ и конечного состояния $\bar{x}_f = [V_f, \theta_f, \psi_f, H_f, L_f, Z_f]^T$ БВС, где переменные состояния V – воздушная скорость, θ – угол наклона траектории в вертикальной плоскости, ψ – путевой угол, H – высота над земной поверхностью, L – длина пути вдоль траектории, Z – боковое отклонение, а также начальное и конечное время полета $[t_0, t_f]$. Требуется рассчитать оптимальную по времени траекторию полета и синтезировать алгоритм управления, который к моменту времени t_f обеспечит перевод БВС в заданное конечное состояние, т. е. в заданную конечную точку траектории.

Поставленная задача сводится к решению терминальной задачи управления динамической системой в фазовом пространстве на основе многочленов степени $2n-1$, где n – порядок системы уравнений, описывающих движение БВС. Исходными данными являются координаты, скорости и перегрузки БВС в начальный и конечный моменты времени.

Результаты исследований

Задача построения многочлена

В общем виде терминальная задача управления для динамической системы в фазовом пространстве имеет вид

$$y^{(n)} + f(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) = g(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)})u, \quad (1)$$

где $\bar{y}(y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}) \in R^n$ – вектор состояния системы; R^n – евклидово пространство вектор-столбцов; $u \in R^n$ – управление; $f(\bar{y})$ и $g(\bar{y})$ – гладкие функции своих аргументов; $g(\bar{y}) \neq 0$ при всех $\bar{y} \in R^n$.

Один из способов решения терминальных задач для систем вида (1) основан на использовании многочленов степени $2n-1$ [Зенков, 2010].

При $n=2$, система (1) запишется следующим образом:

$$\ddot{y} + f(\bar{y}) = g(\bar{y})u, \quad (2)$$

где $\bar{y}(y, \dot{y})$.

В качестве начального состояния системы рассмотрим произвольную точку $\bar{y}(y_0, \dot{y}_0)$ на фазовой плоскости, отличную от начала координат $\bar{y}(0, 0)$. Тогда искомая программа построения траектории $\{\bar{y}(t), u(t)\}$ системы (2) должна удовлетворять граничным условиям $y(0) = y_0, \dot{y}_0(0) = \dot{y}_0$ и $y(T) = y_f, \dot{y}_0(T) = \dot{y}_f$, где $T > 0$ – некоторое конечное значение независимой переменной t .

Согласно теории решения системы дифференциальных уравнений¹, фазовым графиком функции $\varphi(t) \in C^m[0, T]$ в фазовом пространстве системы (1) называют кривую, заданную параметрически при помощи уравнений $y^{(i)} = \varphi^{(i)}(t), i = \overline{0, n-1}, t \in [0, T]$.

Рассмотрим многочлен $p(t)$, фазовый график $\bar{p}(t) = [p(t), \dot{p}(t)], t \in [0, T]$ которого соединяет точки $\bar{y}(y_0, \dot{y}_0)$ и $\bar{y}(0, 0)$ в фазовом пространстве системы (2).

Если T задано, согласно [Краснощёченко и др., 2005] существует такой единственный многочлен степени $n=3$, имеющий вид:

$$p(t) = y_0 + \dot{y}_0 t + c_1 t^2 + c_2 t^3, \quad (3)$$

что выполнены условия $p(T) = 0, \dot{p}(T) = 0$. Отметим, что при любых значениях постоянных c_1 и c_2 справедливы равенства $p(0) = y_0, \dot{p}(0) = \dot{y}_0$.

Коэффициенты c_1 и c_2 находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} T^2 & T^3 \\ 2T & 3T^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_0 - \dot{y}_0 T \\ -\dot{y}_0 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

решение которой существует и единственно в силу невырожденности матрицы этой системы.

¹ Зенков А. В. Системы дифференциальных уравнений и элементы теории устойчивости: Учебник для студентов физических специальностей. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2010. 54 с.

Таким образом, фазовый график $\bar{p}(t)=[p(t), \dot{p}(t)], t \in [0, T]$ многочлена (3) при указанных значениях коэффициентов c_1 и c_2 соединяет точку $\bar{y}(y_0, \dot{y}_0)$ и $\bar{y}(0, 0)$ в фазовом пространстве системы (2), причём $p(T) = 0, \dot{p}(T) = 0$.

В случае, если T не задано, имеет место следующий результат.

Для существования многочлена $p(t)$ степени $n=2$, фазовый график $\bar{p}(t)=[p(t), \dot{p}(t)], t \in [0, T]$ которого соединяет точки $\bar{y}(y_0, \dot{y}_0)$ и $\bar{y}(0, 0)$ в фазовом пространстве системы (2), необходимо и достаточно выполнения условия $y_0 \dot{y}_0 < 0$.

Рассмотрим систему (1) произвольного порядка n . Предположим, что значение $T > 0$ задано. Тогда согласно [Краснощёченко и др., 2005] существует единственный многочлен степени $2n-1$, имеющий вид

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!} t^k + \sum_{k=1}^n c_k t^{n-1+k}, \quad (5)$$

фазовый график $\bar{p}(t)=[p(t), \dot{p}(t), \dots, p^{(n-1)}(t)], t \in [0, T]$ которого соединяет точки $\bar{y}(y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ и $\bar{y}(0, \dots, 0)$ в фазовом пространстве системы (1), причём $p(T) = 0, \dot{p}(T) = 0, \dots, p^{(n-1)}(T) = 0$.

Постоянные c_1, c_2, \dots, c_n находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} T^n & T^{n+1} & \dots & T^{2n-1} \\ nT^{n-1} & (n+1)T^n & \dots & (2n-1)T^{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n!}{1!} T & \frac{(n+1)!}{2!} T^2 & \dots & \frac{(2n-1)!}{n!} T^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!} t^k \\ -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{(k-1)!} T^{k-1} \\ \vdots \\ -y_0^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad (6)$$

решение которой существует и единственно в силу новорожденности матрицы этой системы.

Когда значение T не фиксировано, имеет место следующее утверждение.

Для существования многочлена степени $2n-1$, фазовый график $\bar{p}(t)=[p(t), \dot{p}(t), \dots, p^{(n-1)}(t)], t \in [0, T]$, который соединяет точки $\bar{y}=(y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ и $\bar{y}=(0, \dots, 0)$ в фазовом пространстве системы (1), достаточно, чтобы число перемен знаков в системе начальных значений $y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-2)}, y_0^{(n-1)}$ было нечётно.

Рассмотрим многочлен

$$p(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!} t^k + \sum_{k=1}^{n-1} c_k t^{n-1+k}, \quad (7)$$

где c_1, c_2, \dots, c_{n-1} – константы, подлежащие определению. Отметим, что при любых значениях постоянных c_1, c_2, \dots, c_{n-1} для многочлена (7) выполняются условия $p(0) = y_0, \dot{p}(0) = \dot{y}_0, \dots, p^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}$.

Соотношения $p(T) = 0, \dot{p}(T) = 0, \dots, p^{(n-1)}(T) = 0$ запишем в виде системы уравнений относительно неизвестных c_1, c_2, \dots, c_{n-1} и T , которая имеет вид

$$\begin{pmatrix} T^n & T^{n+1} & \dots & T^{2n-1} \\ nT^{n-1} & (n+1)T^n & \dots & (2n-1)T^{2n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{n!}{1!}T & \frac{(n+1)!}{2!}T^2 & \dots & \frac{(2n-1)!}{n!}T^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sum_{k=0}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{k!} t^k \\ -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{y_0^{(k)}}{(k-1)!} T^{k-1} \\ \vdots \\ -y_0^{(n-1)} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Решив систему линейных алгебраических уравнений относительно постоянных c_1, c_2, \dots, c_{n-1} и подставив их в последнее уравнение системы (8), получим относительно неизвестного T следующее уравнение

$$\begin{aligned} & y_0^{(n-1)}T^{n-1} + \frac{n!}{1!(n-2)!} y_0^{(n-2)}T^{n-2} + \frac{(n+1)!}{2!(n-3)!} y_0^{(n-3)}T^{n-3} + \\ & + \frac{(2n-3)!}{1!(n-2)!} \dot{y}_0 T + \frac{(2n-2)!}{(n-1)!} y_0 = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Согласно [Краснощёченко и др., 2005] число положительных корней многочлена, стоящего в левой части равенства (9), равно числу перемен знаков в системе коэффициентов или меньше этого числа на чётное число.

Таким образом, если число перемен знаков в указанной системе значений коэффициентов нечётно, то существует хотя бы одно положительное решение $T > 0$ уравнения (9). В этом случае фазовый график $\bar{p}(t) = [p(t), \dot{p}(t), \dots, p^{(n-1)}(t)], t \in [0, T]$ многочлена (7), (8) соединяет точки $\bar{y}(y_0, \dot{y}_0, \dots, y_0^{(n-1)})$ и $\bar{y}(0, \dots, 0)$ в фазовом пространстве системы (1), причём $p(T) = 0, \dot{p}(T) = 0, \dots, p^{(n-1)}(T) = 0$.

Программное управление, являющееся решением рассматриваемой терминальной задачи для системы (1), следующее

$$u(t) = \frac{1}{g(\bar{p}(t))} (p^{(n)}(t) + f(\bar{p}(t))), \quad (10)$$

где $p(t)$ – соответствующий многочлен (5), (6) или (8), (9).

Таким образом, данную методику можно применять для решения задачи оптимального управления траекторией полета БВС.

Математическая модель движения БВС

При решении поставленной задачи рассмотрим движение только центра масс БВС, которое в пространстве описывается системой уравнений [Моисеев, 2023]

$$\dot{\vec{x}} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{H} \\ \dot{L} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{cases} g(n_x - \sin \theta); \\ \frac{g(n_y \cos \gamma - \cos \theta)}{V}; \\ -\frac{n_y g \sin \gamma}{V \cos \theta}; \\ V \sin \theta; \\ V \cos \theta \cos \psi; \\ -V \cos \theta \sin \psi. \end{cases} \quad (11)$$

$$n_x = \frac{P \cos \alpha - X_a}{mg}, \quad n_y = \frac{Y_a + P \sin \alpha}{mg}, \quad (12)$$

где $x^T = [V, \theta, \psi, H, L, Z]$ – фазовый вектор переменных состояния, включающий соответственно истинную воздушную скорость [м/с], угол наклона траектории полета [град], путевой угол [град], координаты центра масс БВС (высота, дальность полета, боковое смещение) в нормальной земной системе координат [м]; n_x – продольная перегрузка; n_y – поперечная перегрузка; α – угол атаки [град]; β – угол скольжения [град]; γ_a – угол крена [рад]; g – ускорение свободного падения [м/с²]; P – тяга двигателя [Н]; $X_a = \frac{1}{2} C_{xa} \rho V^2 S$ – сила аэродинамического сопротивления [Н]; $Y_a = \frac{1}{2} C_{ya} \rho V^2 S$ – аэродинамическая подъёмная сила [Н]; C_{xa}, C_{ya} – коэффициенты аэродинамических сил; ρ – плотность среды, в которой осуществляется полет; S – площадь крыла [м²]; m – масса БВС [кг].

В качестве управляющих переменных в (1) принимаются перегрузки и угол крена $u(t) = (n_x(t), n_y(t), \gamma(t))$.

Для решения поставленной задачи на основе многочленов степени $2n-1$, необходимо систему дифференциальных уравнений (11) привести к виду (1). Из теории решения систем дифференциальных уравнений дифференциальные уравнения n -го порядка можно свести к системе из n уравнений первого порядка. Возможен и обратный переход, позволяющий заменить решение системы решением одного дифференциального уравнения высшего порядка [Канатников и др., 2010].

Для получения функций управления перейдем к новым управлениям

$$u_1 = n_x; \quad u_2 = n_y \cos \gamma; \quad u_3 = n_y \sin \gamma. \quad (13)$$

Тогда уравнения математической модели движения БВС являются линейными по новым управлениям

$$\dot{\bar{x}} = \begin{bmatrix} \dot{V} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \\ \dot{H} \\ \dot{L} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{cases} u_1 g - g \sin \theta, \\ \frac{u_2 g - g \cos \theta}{V}, \\ -\frac{u_3 g}{V \cos \theta}, \\ V \sin \theta, \\ V \cos \theta \cos \psi, \\ -V \cos \theta \sin \psi. \end{cases} \quad (14)$$

где $\bar{x}^T = [V, \theta, \psi, H, L, Z]$ – фазовый вектор переменных состояния;

$\bar{u}(t) = [u_1(t), u_2(t), u_3(t)]$ – вектор управления.

Для получения управлений приведём систему уравнений (14) к каноническому виду, введя новые переменные состояния

$$\begin{aligned} x_1 &= H; \\ x_2 &= L; \\ x_3 &= Z; \\ x_4 &= V \sin \theta; \\ x_5 &= V \cos \theta \cos \psi; \\ x_6 &= -V \cos \theta \sin \psi. \end{aligned} \quad (15)$$

Новые переменные состояния определяют гладкую невырожденную замену переменных, так как исходные состояния могут быть выражены с помощью новых из следующих соотношений

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{\dot{x}_1}{V}, \quad \cos \theta = \frac{\sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}}{V}, \\ \sin \psi &= -\frac{\dot{x}_3}{\sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}}, \quad \cos \psi = \frac{\dot{x}_2}{\sqrt{\dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}}, \\ V &= \sqrt{\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2 + \dot{x}_3^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Дифференцируя эти соотношения, находим

$$\dot{\theta} = \frac{\dot{V} \ddot{x}_1 - V \dot{x}_1}{V^2 \cos \theta}, \quad \dot{\psi} = \frac{(\dot{x}_2 \ddot{x}_3 - \dot{x}_3 \ddot{x}_2) \cos^2 \psi}{\dot{x}_2^2}, \quad \dot{V} = \frac{\dot{x}_1 \ddot{x}_1 + \dot{x}_2 \ddot{x}_2 + \dot{x}_3 \ddot{x}_3}{V}. \quad (17)$$

С другой стороны, дифференцируя три последних уравнения системы (14), получим с учётом первых трех уравнений этой системы следующие соотношения

$$\begin{cases} \ddot{x}_1 = -g + u_1 g \sin \theta + u_2 g \cos \theta, \\ \ddot{x}_2 = u_1 g \cos \theta \cos \psi - u_2 g \sin \theta \cos \psi + u_3 g \sin \psi, \\ \ddot{x}_3 = -u_1 g \cos \theta \sin \psi + u_2 g \sin \theta \sin \psi + u_3 g \cos \psi. \end{cases} \quad (18)$$

Таким образом, математическую модель движения БВС можно представить как динамическую систему вида (1).

Формирование траектории полета БВС

Тягу двигателя и угол атаки можно определить по соотношениям (12). Из (17), (18) вместе с выражениями (16) следует, что переменные состояния (V, θ, ψ) и переменные управления (n_x, n_y, γ) могут быть представлены в виде функций $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ и их производных по времени. Однако задача заключается в поиске траектории, удовлетворяющей граничным условиям, поэтому необходимо показать, при каких условиях функции $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ будут соответствовать граничным условиям.

Граничные условия на переменные состояния и управления определяют граничные значения функций $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ на концах отрезка времени $[t_0, t_f]$, а также их первые и вторые производные (граничные условия для новых переменных состояния и управлений легко получить, подставляя начальные граничные значения задачи в формулы, по которым производилась замена переменных). По сути, любые гладкие функции, удовлетворяющие полученным граничным условиям, будут являться решением поставленной задачи. Такие функции можно найти среди многочленов 3-го порядка.

Система уравнений для математической модели движения БВС относительно терминальной задачи управления имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_4; \\ \dot{x}_2 = x_5; \\ \dot{x}_3 = x_6, \\ \dot{x}_4 = -g + u_1 g \sin \theta + u_2 g \cos \theta; \\ \dot{x}_5 = u_1 g \cos \theta \cos \psi - u_2 g \sin \theta \cos \psi + u_3 g \sin \psi; \\ \dot{x}_6 = -u_1 g \cos \theta \sin \psi + u_2 g \sin \theta \sin \psi + u_3 g \cos \psi. \end{cases} \quad (19)$$

Рассмотрим методику решения задачи построения многочлена на примере функции $x_1(t)$. Данная система с учётом переменных $y = x_1, \dot{y} = \dot{x}_1, \ddot{y} = \ddot{x}_1$ примет вид уравнения (1).

$$y^{(3)} + f(y, \dot{y}, \ddot{y}) = g(y, \dot{y}, \ddot{y})u. \quad (20)$$

Тогда существует единственный полином 5-й степени, имеющий вид

$$p(t) = y_0 + \dot{y}_0 t + \frac{\ddot{y}_0}{2} t^2 + c_1 t^3 + c_2 t^4 + c_3 t^5, \quad (21)$$

фазовый график $\bar{p}(t) = (p(t), \dot{p}(t), \ddot{p}(t))$, $t \in [0, t_f]$ которого соединяет точки $\bar{y} = (y_0, \dot{y}_0, \ddot{y}_0)$ и $\bar{y} = (y_f, \dot{y}_f, \ddot{y}_f)$ в фазовом пространстве системы (20).

Согласно уравнениям (6) и (8) коэффициенты c_1 , c_2 и c_3 находятся из системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{pmatrix} t_f^3 & t_f^4 & t_f^5 \\ 3t_f^2 & 4t_f^3 & 5t_f^4 \\ 6t_f & 12t_f^2 & 20t_f^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{1f} - y_{10} - \dot{y}_{10} t_f - \frac{1}{2} \ddot{y}_{10} t_f^2 \\ \dot{y}_{1f} - \dot{y}_{10} - \frac{1}{2} \ddot{y}_{10} t_f \\ \ddot{y}_{1f} - \ddot{y}_{10} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

решение которой существует и единственно в силу новорожденности матрицы этой системы.

Таким же образом определяются коэффициенты для $x_2(t), x_3(t)$ системы уравнений (19).

Найдя решение функций $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$, можно определить функции $H(t), L(t), Z(t)$. Эти функции определяют пространственную траекторию полета БВС, которая к моменту времени t_f переведёт БВС в заданное положение.

Критерий качества управления, минимизирующий время прохождения траектории, имеет следующий вид

$$J(t_0, t_f) = \int_{t_0}^{t_f} dt \rightarrow \min. \quad (23)$$

Параметры траекторного движения БВС зависят от пилотажных ограничений, которые влияют на его манёвренность, и ограничений, связанных с безопасностью полета. При планировании траектории учитывались следующие ограничения:

$$\begin{aligned} V_{\min} \leq V \leq V_{\max}, \quad \theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}, \quad \psi_{\min} \leq \psi \leq \psi_{\max}, \\ L_{\min} \leq L \leq L_{\max}, \quad H_{\min} \leq H \leq H_{\max}, \quad Z_{\min} \leq Z \leq Z_{\max}, \\ n_{x\min} \leq n_x \leq n_{x\max}, \quad n_{y\min} \leq n_y \leq n_{y\max}, \quad \gamma_{\min} \leq \gamma \leq \gamma_{\max}. \end{aligned} \quad (24)$$

Поиск минимальной по времени полета траектории БВС с заданной точностью $\varepsilon > 0$ заключается в переборе по времени t (в порядке возрастания) траекторий, увеличивая время манёвра t на величину $\delta > 0$ (причём $\delta \geq \varepsilon$). Начальным значением для t (обозначим его t_0) будем считать минимальное

время, за которое можно перейти из начального состояния в конечное, двигаясь прямолинейно с максимально возможной скоростью

$$t_0 = \frac{\sqrt{(H_f - H_0)^2 + (L_f - L_0)^2 + (Z_f - Z_0)^2}}{V_{\max}}. \quad (25)$$

На каждом шаге перебора необходимо проверять, удовлетворяют ли траектория и реализующие её управления условиям, которые накладываются на решение максимальными и минимальными значениями переменных состояния и управлений. Если была найдена удовлетворяющая граничным условиям траектория, то необходимо уменьшить соответствующее значение времени t на величину δ , а потом уменьшить значение δ в 2 раза (проводить уменьшение, пока δ не станет равным ε). Если была найдена траектория, не удовлетворяющая наложенным на неё ограничениям, то значение t необходимо увеличить на соответствующую величину δ .

Первая траектория, которая удовлетворяет этим ограничениям при $\delta = \varepsilon$, и есть оптимальная по времени с точностью ε .

Тестирование алгоритма управления

В реальных полётах может требоваться изменение траектории БВС, например, облёт препятствий (высотные здания, линии электропередачи, зоны опасных метеоявлений), разрешение конфликтной ситуации и пр. Поэтому для практики большой интерес представляют пространственные манёвры БВС, например, такие, как набор высоты и разворот.

Для оценки адекватности полученной модели траекторного движения БВС и работоспособности синтезированного алгоритма управления решалась задача оптимального управления траекторией при наборе высоты с разворотом. Задача решалась методами численного моделирования в среде Matlab при заданных векторах начальных $\bar{x}_0 = [120 \ 0 \ 0 \ 900 \ 0 \ 0]^T$ и конечных $\bar{x}_f = [120 \ 0 \ -180 \ 1200 \ 0 \ 300]^T$ состояний. На управления и значения переменных состояния задавались следующие ограничения:

$$\begin{aligned} 75 \text{ м/с} \leq V \leq 150 \text{ м/с}; \quad \theta \leq 60^\circ; \quad -90^\circ \leq \psi \leq 270^\circ; \\ -0,1 \leq n_x \leq 0,6; \quad -0,1 \leq n_y \leq 2; \quad \gamma \leq 60^\circ. \end{aligned}$$

На рис. 1 показана синтезированная в 3D пространстве оптимальная по критерию минимума полётного времени траектория набора высоты с разворотом. На рис. 2 и рис. 3 показано изменение переменных управления и состояния в процессе манёвра, время выполнения которого в заданных условиях составило 17,55 с.

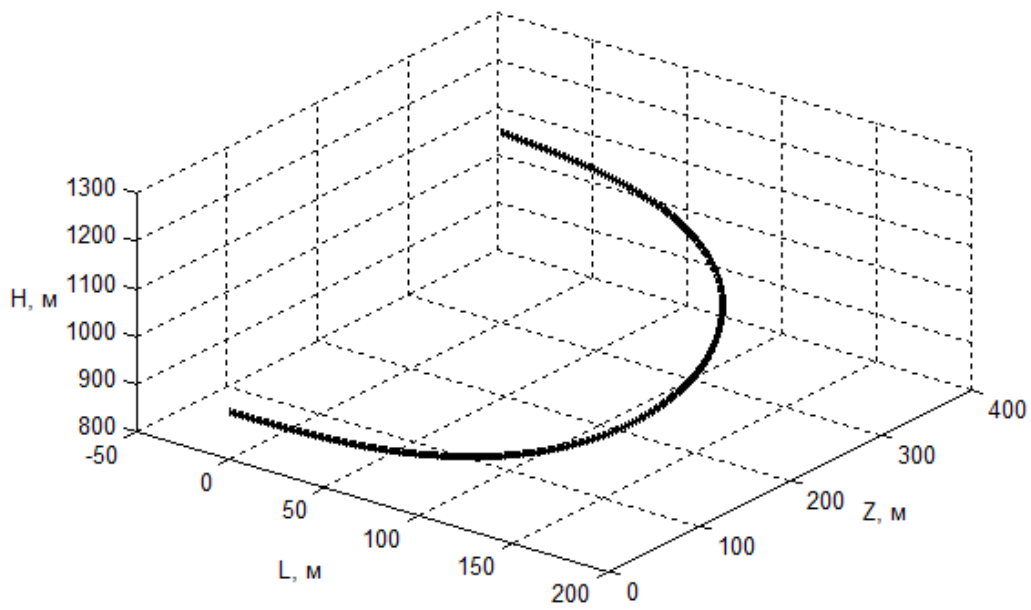


Рисунок 1 – 3D траектория движения БВС

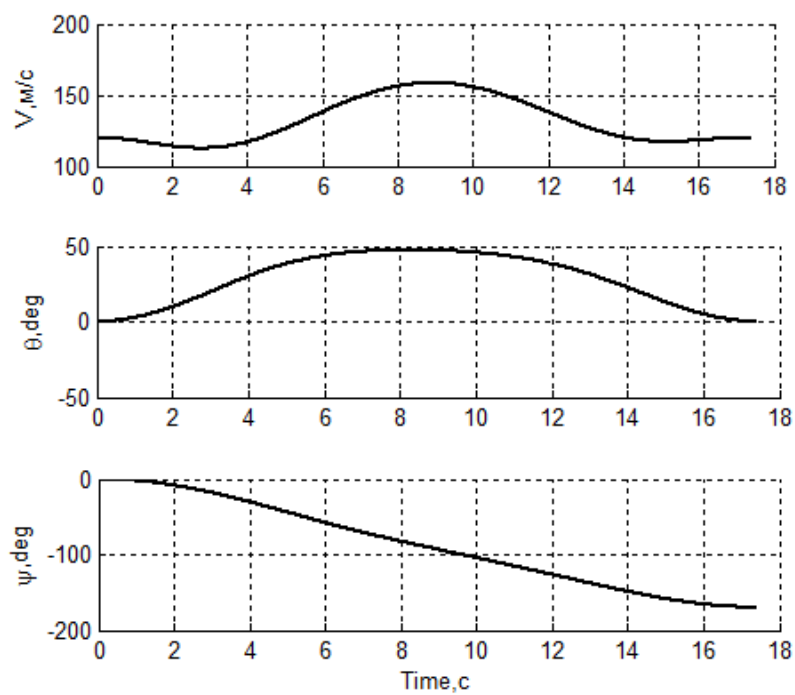


Рисунок 2 – Переменные состояния

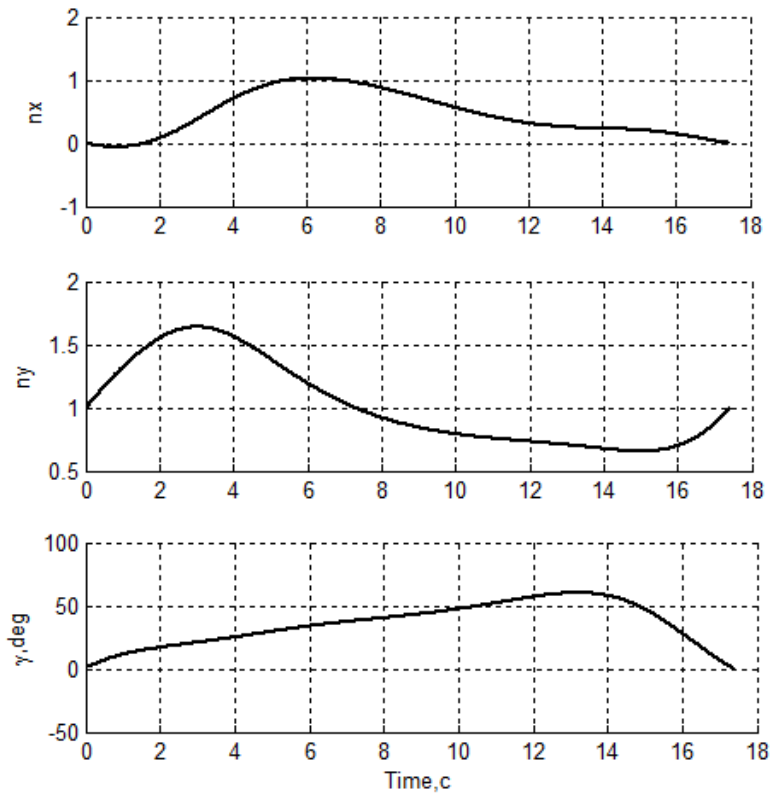


Рисунок 3 – Переменные управления

Из представленных графиков видно, что на интервале времени от 0 до примерно $t=10$ с происходит набор высоты с разворотом траектории влево от исходного нулевого курса на угол $\psi \approx -180^\circ$. Крен выходит на максимально допустимое значение с максимальной скоростью, а затем, примерно с момента времени $t=14$ с, БВС начинает движение в противоположную сторону, и тоже с максимальной скоростью. Если бы не было ограничения на скорость перекладки, то очевидно, что оптимальное поведение крена было бы релейным. Скорость полета в среднем повышенная.

На рис. 4 представлены результаты оценки работоспособности полученного алгоритма управления для случаев: кривая 1 – траектория полета с оптимальным управлением без ограничений на параметры БВС; кривая 2 – траектория полета без оптимального управления при отсутствии ограничений на управления и переменные состояния; 3 – траектория с оптимальным управлением при ограничениях на управления и переменные состояния. Задавались вектора начальных $\bar{x}_0 = [120 \ 0 \ 0 \ 900 \ 0 \ 0]^T$ и конечных $\bar{x}_f = [120 \ 0 \ -180 \ 1200 \ 0 \ 300]^T$ состояний. На управления и значения переменных состояния задавались следующие ограничения:

$$75 \text{ м/с} \leq V \leq 170 \text{ м/с}; \quad -90^\circ \leq \theta \leq 90^\circ; \quad -180^\circ \leq \psi \leq 180^\circ;$$

$$-0,1 \leq n_x \leq 0,6; \quad -0,1 \leq n_y \leq 2; \quad -60^\circ \leq \gamma \leq 60^\circ.$$

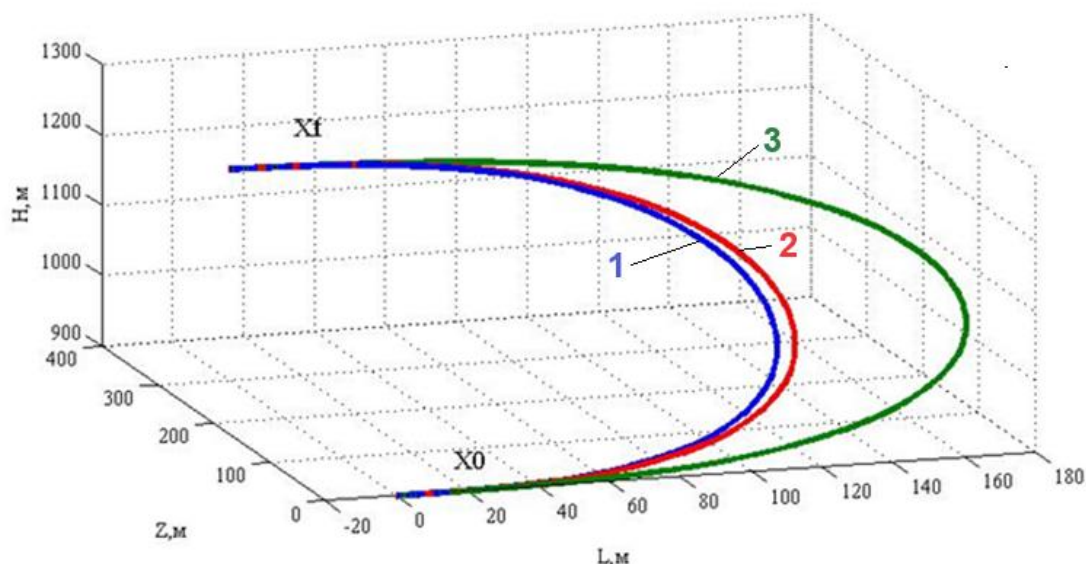


Рисунок 4 – Траектории при различных управлениях

Полученные результаты являются основанием для верификации разработанной модели.

Выводы

В результате проведенных исследований получены методика синтеза оптимальной траектории полета БВС и алгоритм системы управления полётом. Путем имитационного математического моделирования выполнена верификация и валидация предложенной методики и программного обеспечения. Рассмотренная методика позволяет анализировать и сравнивать поведение параметров состояния и управлений, их изменение с течением времени в процессе манёвра БВС и в зависимости друг от друга.

Библиографический список

- Белинская Ю. С.* Метод накрытий для терминального управления с учетом ограничений // Дифференциальные уравнения / Ю. С. Белинская, В. Н. Четвериков. 2014. Т. 50, № 12. С. 1629. DOI 10.1134/S0374064114120073. EDN TAJWXB.
- Канатников А. Н.* Задача терминального управления движением летательного аппарата. Нелинейная динамика и управление. / А. Н. Канатников, Е. А. Шмагина. М.: Физматлит, 2010. С. 79-94.
- Касаткина Т. С.* Преобразование аффинных систем к каноническому виду с использованием замен независимой переменной // Наука и образование: научное издание МГТУ им. Н.Э. Баумана. 2013. № 7. С. 285-298. EDN RMYEDJ.
- Краснощёченко В. И.* Нелинейные системы: геометрические методы анализа и синтеза / В. И. Краснощёченко, А. П. Крищенко. М.: Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана, 2005. 520 с. EDN QJOUR.
- Крищенко А. П.* Орбитальная линеаризация аффинных систем // Доклады Академии наук, 2013. Т. 453. № 6. С.620-623. DOI 10.7868/S0869565213360280. EDN RPASWR.
- Крылов И. А.* Решение задач оптимального управления методом локальных вариаций / И. А. Крылов, Ф. Л. Черноушко // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1966. Т. 6, № 2. С. 203-217. EDN VTAXHJ.

Кузнецов М. Н. Терминальное управление аэробаллистическим высокоскоростным ЛА: специальность 05.13.01 «Системный анализ, управление и обработка информации (по отраслям)»: диссертация на соискание ученой степени кандидата технических наук / Кузнецов Максим Николаевич. Москва, 2013. 145 с. EDN SUZNCB.

Моисеев В. С. Прикладная теория управления беспилотными летательными аппаратами: монография. Казань: ГБУ Республиканский центр мониторинга качества образования. Серия «Современная прикладная математика и информатика», 2023. 768 с.

Расчет и анализ движения летательных аппаратов: Инженерный справочник. / С. А. Горбатенко, Э. М. Макашов, Ю. Ф. Полушкин, Л. В. Шефтель. М.: Машиностроение, 1971. 352 с.

Фетисов Д. А. Решение терминальных задач для многомерных аффинных систем на основе преобразования к квазиканоническому виду // Вестник МГТУ им. Н. Э. Баумана. Естественные науки. 2014. № 5(56). С. 16-31. EDN STSOUP.

Черноусько Ф. Л. Метод локальных вариаций для численного решения вариационных задач // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1965. Т. 5, № 4. С. 749-754. EDN VRTIIV.

Global TBO Concept (Version 0.11). By the ICAO Air traffic management requirements and performance panel (ATMRPP) [Электронный ресурс]. – 2019. URL: https://www.icao.int/airnavigation/tbo/PublishingImages/Pages/Why-Global-TBO-Concept/Global%20TBO%20Concept_V0.11.pdf (дата обращения 13.05.2024).

Hoffner K. Geometries of Single-Input Locally Accessible Control Systems / K. Hoffner, M. Guay // Proceedings of the ACC Conference. 2009. P.1480-1484.

Hybrid AI-based Dynamic Re-routing Method for Dense Low-Altitude Air Traffic Operations / Y. Xie, A. Gardi, R. Sabatini, A. Liang // IEEE/AIAA 41st Digital Avionics Systems Conference. DASC 2022. Portsmouth. VA. USA, 2022. pp. 1-9. doi: 10.1109/DASC55683.2022.9925777.

Levine J. Flat systems. Mini-Course / J. Levine, Ph. Martin, P. Rouchon // ECC'97 European Control Conference, Brussels, 1-4 July, 1997. P. 54.

Li S.-J. Orbital feedback linearization for multi-input control systems / S.-J. Li, W. Respondek // International Journal of Robust and Nonlinear Control. 2015. V. 25, Is. 9. P. 1352-1378.

Next Generation Flight Management System for Real-Time Trajectory Based Operations / S. Ramasamy, R. Sabatini, A. Gardi, T. Kistan // Applied Mechanics and Materials. 2014a. vol. 629. pp. 344-349.

Ramasamy S. Unmanned Aircraft Mission Management System for Trajectory Based Operations / S. Ramasamy, R. Sabatini, A. Gardi // Fourth Australasian Unmanned Systems Conference, 2014b.

Skrypnik O. N. Radio Navigation Systems for Airports and Airways. Berlin: Springer Aerospace Technology, 2019. 226 p.

References

Belinskaya Yu. S., Chetverikov V. N. (2014). The method of covers for terminal control, taking into account restrictions. *Differential equations*. 50(12): 1629 p. (in Russian)

Chernous'ko F. L. (1965). The method of local variations for the numerical solution of variational problems. *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* 5(4): 749-754. (in Russian)

Fetisov D. A. (2014). Solving terminal problems for multidimensional affine systems based on the transformation to a quasi-canonical form. *Vestnik MGTU im. N. E. Baumana. Estestvennye nauki*, 5(56): 16-31. (in Russian)

Global TBO Concept (Version 0.11). By the ICAO Air traffic management requirements and performance panel (ATMRPP) (2019). Available at: https://www.icao.int/airnavigation/tbo/PublishingImages/Pages/Why-Global-TBO-Concept/Global%20TBO%20Concept_V0.11.pdf (accessed 13 May 2024).

Gorbatenko S. A., Makashov E. M., Polushkin Yu. F., Sheftel' L. V. (1971). Calculation and analysis of the movement of aircraft: Engineering reference book. Moscow: *Mashinostroenie*, 1971. 352 p. (in Russian)

- Hoffner K., Guay M. (2009). Geometries of Single-Input Locally Accessible Control Systems. *Proceedings of the ACC Conference*. 1480-1484.
- Kanatnikov A. N., Shmagina E. A. (2010). The task of terminal motion control of the aircraft. Nonlinear dynamics and contr. Moscow: *Fizmatlit*, 2010. P.79-94. (in Russian)
- Kasatkina T. S. (2013). Transformation of affine systems to a canonical form using substitutions of an independent variable. *Nauka i Obrazovanie*. 7: 285-298. (in Russian)
- Krasnoshchyochenko V. I., Krishchenko A. P. (2005). Nonlinear systems: geometric methods of analysis and synthesis. Moscow: *Izd-vo MGTU im. N.E. Baumana*, 2005. 520 p. (in Russian)
- Krishchenko A. P. (2013). Orbital linearization of affine systems. *Doklady Akademii nauk*, 453(6): 620-623. (in Russian)
- Krylov I. A., Chernous'ko F. L. (1966). Solving optimal control problems by the method of local variations. *Zh. vychisl. matem. i matem. fiz.* 6(2): 203-217. (in Russian)
- Kuznecov M. N. (2013). Terminal control of an aeroballistic high-speed aircraft. dis. ...kand. tekh. nauk / M. N. Kuznecov. Moscow, 2013. 145 p. (in Russian)
- Levine J., Martin Ph., Rouchon P. (1997). Flat systems. Mini-Course. *ECC' 97 European Control Conference*. 54.
- Li S.-J., Respondek W. (2015). Orbital feedback linearization for multi-input control systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*. 25(9): 1352-1378.
- Moiseev V. S. (2023). Applied theory of control of unmanned aerial vehicles: monograph. Kazan': GBU Respublikanskij centr monitoringa kachestva obrazovaniya. Seriya «Sovremennaya prikladnaya matematika i informatika», 2023. 768 p. (in Russian)
- Ramasamy S, Sabatini R, Gardi A, Kistan T. (2014a). Next Generation Flight Management System for Real-Time Trajectory Based Operations. *Applied Mechanics and Materials*. 629: 344-349.
- Ramasamy S., Sabatini R., Gardi A. (2014b). Unmanned Aircraft Mission Management System for Trajectory Based Operations. *Fourth Australasian Unmanned Systems Conference*, 2014.
- Skrypnik O. N. (2019). Radio Navigation Systems for Airports and Airways. Berlin: *Springer Aerospace Technology*, 2019. 226 p.
- Xie Y., Gardi A., Sabatini R., Liang A. (2022). Hybrid AI-based Dynamic Re-routing Method for Dense Low-Altitude Air Traffic Operations. *IEEE/AIAA 41st Digital Avionics Systems Conference*. 1-9. doi: 10.1109/DASC55683.2022.9925777.