УДК 629.7/621.01

ББК 30в6

Б772

Е. А. Фурманова,

Красноярск, Россия

О. Г. Бойко,

Красноярск, Россия

Л. Г. Шаймарданов,

Красноярск, Россия

К ВОПРОСУ О РАСЧЁТАХ БЕЗОТКАЗНОСТИ МАЖОРИТАРНЫХ И СЛОЖНЫХ СИСТЕМ

В работе предложен методологический подход, основанный на представлении о том, что при стационарном процессе вероятность отказа элемента в работоспособной части системы определяется суммарной плотностью вероятности потоков отказов элементов, составляющих эту часть системы, и их предшествующей наработкой.

Цель работы заключается в сравнении возможностей традиционных и предлагаемых методов в расчётах безотказности мажоритарных и мостиковых систем.

Результаты, полученные по предлагаемому подходу, строго соответствуют условиям отказов систем. Правомерность подхода подтверждена результатами экспериментальных исследований. Предлагаемые в работе методы могут быть использованы при расчётах безотказности функциональных систем самолетов и космических аппаратов.

Ключевые слова: мажоритарная система, сложная система, вероятность отказа, плотность потока отказов элементов, дискретность отказов.

E. A. Furmanova,

O. G. Bojko,

L. G. Shajmardanov,

Krasnoyarsk, Russia

AN ADDITION TO THE QUESTION OF CALCULATIONS OF COMPLICATED AND MAJORITY SYSTEMS FAILURE-FREE

The article proposes a methodological approach based upon the notion that at the stationary approach the probability of element failure in a workable part of the system may be defined by the total density of elements failure probability flows in the system's part.

The purpose of the article is to compare the possibilities of traditional and proposed methods of calculating the majority and bridged systems failure-free.

The results obtained with proposed approach strictly match the systems failure conditions. The approach appropriateness is confirmed by the results of experimental research. The methods proposed in the article may be used in calculating the failure-free of the aircraft and spacecraft functional systems.

Key words: majority system, complicated system, failure probability, elements failure flow density, failure discreteness.

Введение

Начало развития теории надежности датируется серединой 50-х годов прошлого столетия, что отражено в отечественных и зарубежных работах [Сифоров, 1954, с. 12; Гнеденко, 1965, с. 524; Базовский, 1961, с. 373]. Несмотря на существенное развитие, ее основы остались неизменными. В последние десятилетия, с повышением требований и накоплением экспериментальных материалов, осуществляется пересмотр некоторых начальных положений этой теории.

Цель работы заключается в сравнении возможностей традиционных и предлагаемых методов в расчётах безотказности мажоритарных и мостиковых систем.

Анализ традиционного расчёта мажоритарной и мостиковой систем

Мажоритарная система может рассматриваться как вариант систем с параллельным соединением элементов, отказ которых не происходит, если из n элементов работоспособными остаются любые m элементов ($m < n$).

В работе [Сугак, 2001, с. 608] рассмотрен пример определения безотказности мажоритарной системы «2 из 5», приведенной на *рис. 1*.

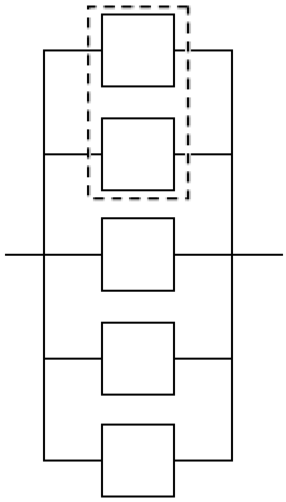

Рис. 1. Схема мажоритарной системы «2 из 5»

Вероятность безотказной работы P такой системы определена в виде

$$P = p^3 \cdot q^2, \qquad (1)$$

где p и q – вероятности безотказной работы и отказа для элементов системы соответственно.

При анализе выражения (1) становится очевидным, что:

- при значениях для элементов p = 1 и q = 0, для системы P = 0;

- при значениях для элементов p = 0 и q = 1, для системы P = 0.

Это значит, что при наработках элементов $t = 0$ и при времени t, соответствующего наработке до отказа системы, вероятность ее безотказной работы в обоих случаях будет равна нулю.

Этот, более чем странный, результат побудил нас проследить характер изменения безотказной работы системы P в функции безотказной работы элемента p. В *табл. 1* приведены значения вероятностей безотказной работы элементов (при $q = 1–p$) и соответствующие им значения вероятности безотказной работы системы.

Таблица 1

Значения *p* и соответствующие им значения *P*

p	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
P	0	0,005	0,023	0,034	0,02	0

Совершенно очевидно, что вероятность безотказной работы рассматриваемой системы не может изменяться таким образом.

В работе [Сугак, 2001, с. 608] приведена таблица состояний системы «2 и 5», в которой даны 32 состояния. С использованием теоремы сложения вероятностей состояний получено выражение для оценки суммарного значения вероятности безотказной работы мажоритарной системы в виде

$$P=10p^2-20p^3+15p^4-4p^5. \qquad (2)$$

Зависимость вероятности безотказной работы системы от вероятности безотказной работы элемента p, построенная по выражению (2), приведена на *рис. 2*.

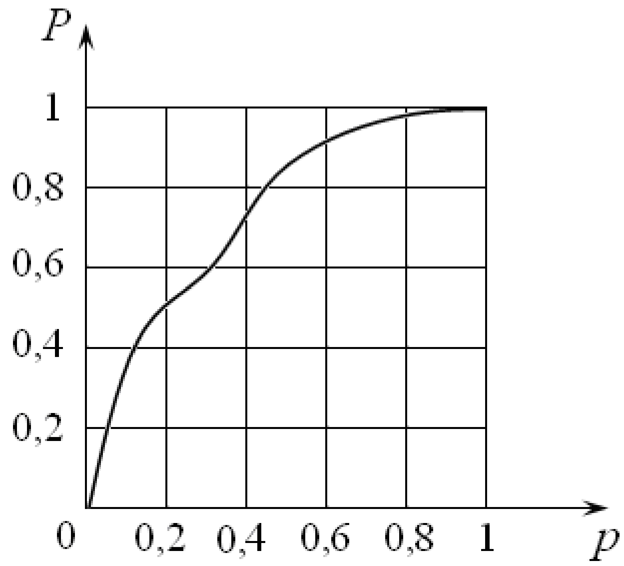

Рис. 2. Зависимость вероятности безотказной работы мажоритарной системы от вероятности безотказной работы элементов

(расчёт по методу с использованием теоремы умножения вероятностей)

Следует отметить, что при получении выражения (2) допущена методическая ошибка, состоящая в том, что сумма, приведенная в (2) определена как сумма вероятностей состояний системы при реализации в ее структуре отказов четырех и пяти элементов. Но, система «2 из 5» будет находиться в состоянии отказа уже при отказе четырех элементов, и, следовательно, при отказе пятого элемента она в соответствии с выражением (2) откажет вторично!

Из приведенного примера следует, что полученные в [Сугак, 2001, с. 608] выражения противоречат как характеру изменения безотказности системы, так и здравому смыслу.

Перейдем к рассмотрению традиционного метода расчёта безотказности сложных систем. К сложным системам относят те из них, безотказность которых не может быть определена только по схеме последовательного или только параллельного соединения. Расчёт безотказности таких систем строится с использованием формализованных моделей в виде формул алгебры логики. Простейшей сложной системой является мостиковая система, приведённая в [Рябинин, 2007, с. 276] и на *рис. 3*.

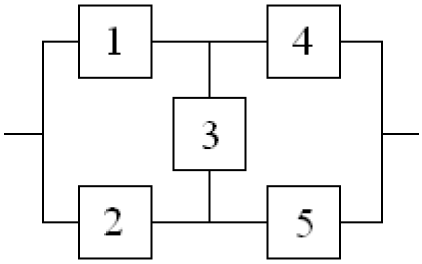

Рис.3. Мостиковая система

В постановочной части задачи отмечается, что такая система может отказать по двум сценариям:

- при отказе двух элементов 1, 2, либо 4, 5;

- при отказе трех элементов 1, 3, 5, либо 2, 3, 4.

После перехода от логических переменных к вероятностям отказов и безотказной работы элементов, при условии, что все элементы одинаковы, в [Рябинин, 2007, с. 276] записано выражение для вероятности отказа системы Q в виде

$$Q = 2q^2 + 2q^3 + 2q^5 - 5q^4 . \qquad (3)$$

Из (3) совершенно очевидно, что система откажет только тогда, когда одновременно откажут все ее элементы, так как $Q = 1$ только при всех $q = 1$. Такое представление далеко от здравого смысла, поскольку одновременный отказ всех элементов невозможен. Кроме того, в постановочной части справедливо указанно, что в соответствии со схемой соединения, система может отказать как вследствие отказа двух, так и трех элементов.

На *рис. 4* приведена зависимость изменения вероятности отказа системы Q от вероятности отказа элемента q, построенная в соответствии с (3).

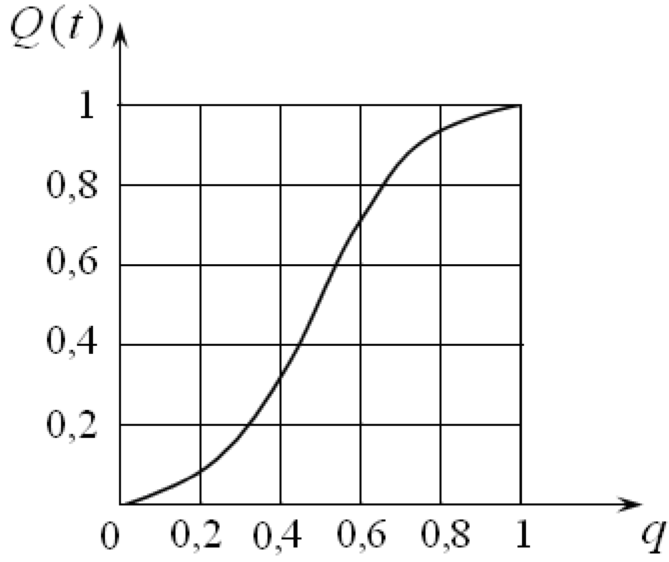

Рис. 4. Зависимость вероятности отказа мостиковой системы от вероятности отказа элементов

(расчёт по методу с использованием теоремы умножения вероятностей)

Приведенная на *рис. 4* кривая хотя и не является функцией распределения вероятности отказа по времени, но, как и последняя, имеет форму, свойственную нормальному закону распределения. Эта форма определяется следствием из центральной предельной теоремы теории вероятностей. В соответствии с законом, при достаточном числе суммируемых функций распределения, нормальный закон реализуется вне зависимости от законов распределения членов суммы [Венцель, 1962, с. 563; Овчаров, 1988, с. 476]. Кроме того, в выражении (3) потеряна дискретность отказов, а после замены значений q на функции распределения $q(t)$, не представляется возможным определение интервалов времени, на которых отказывают два, либо три элемента.

Причин столь существенного расхождения результатов расчёта безотказности систем с ожидаемыми и оправданными, с точки зрения здравого смысла, несколько. Рассмотрим их кратко.

Первая состоит в том, что теорема умножения вероятностей применима только к умножению вероятностей событий q, но не к вероятностям дополнений p этих событий до единицы. В работе [Печкин, 2004, с. 456] отмечается, что безотказная работа p не событие, а дополнение к событию q, и вместо перемножения дополнений p необходимо использовать теорему сложения вероятностей событий q. С другой стороны, в экспериментах по определению безотказности элементов, измеряемой величиной является время. В связи с этим, функция распределения $q(t)$ является функцией случайной величины времени. Если в выражениях (1), (2) и (3) заменить вероятность q, воспринимаемую как вероятность события на функцию $q(t)$, то использование теоремы умножения вероятностей становится некорректным.

Обе рассматриваемые в работе системы откажут только тогда, когда в них откажет определенное число элементов. Но по выражениям (1), (2) и (3) определить протяженность отрезков времени, на которых отказывают элементы, не представляется возможным. В этих решениях утрачена дискретность состояний системы. В связи с этим, второй причиной является потеря дискретности изменения состояний системы. Поэтому указанные выражения остаются неизменными во всем диапазоне изменения времени, когда вероятность отказа системы изменяется от 0 до 1.

Третья причина состоит в том, что при решении задач расчёта безотказности мажоритарной и мостиковой систем используется теорема сложения вероятностей отказа для систем при различных сценариях. В связи с этим, вопрос о корректности применения теорем умножения и сложения вероятностей заслуживает отдельного обсуждения.

Как отмечалось выше в [Венцель, 1962, с. 563; Овчаров, 1988, с. 476], теорема сложения вероятностей получена и доказана в теории вероятности для событий, относящихся к схеме случаев. Ее применение аксиоматически (без доказательства) допускается к событиям, не относящимся к схеме случаев. Напомним, что к событиям, относящимся к схеме случаев, относятся события, обладающие симметрией, то есть равновозможностью их реализации в опытах. Примером таких событий может быть выпадение определенных граней при бросании «игральной кости». Так, вероятность выпадения какой-либо наперед заданной грани равна 0,166. Вероятность выпадения хотя бы одной из двух наперед заданных граней будет в два раза больше, чем одной. То есть в данном случае осуществляется суммирование вероятностей.

Если сместить центр масс игральной кости от геометрического центра, то симметрия вероятности выпадения граней изменится. Такая игральная кость будет демонстрировать события, не относящиеся к схеме случаев.

Кроме того, для событий характерны следующие общие свойства:

- независимость исхода опытов от времени их проведения,
- сумма вероятностей всех исходов опытов равна 1.

В надежности, вероятность отказа системы по тому, либо иному сценарию определяется в виде функции распределения случайной величины времени. Функция распределения оценивает вероятность отказа на интервале времени $[0,\ t]$ и никак не фиксирует момент времени реализации отказа на этом отрезке, т. е. вводит неопределенность. Применяя в выражении (2) теорему сложения вероятностей, в [Сугак, 2001, с. 608] фактически суммировали неопределенности, что и привело к ошибочному результату.

Следует отметить, что в теоретической физике, задолго до формирования надежности как науки, заложены постулаты и принципы использования статистических методов в исследованиях конечных физических систем. В частности, постулат Макса Планка гласит [Трайбус, 1965, с. 504]: «Всякая конечная физическая система, при рассмотрении ее статистическими методами, должна представляться так, как будто она может находиться только в дискретных состояниях». Для рассматриваемых систем такими состояниями являются: исправное, неисправные, но работоспособные с отказами одного, двух или трех элементов, и состояние отказа. Переход из состояния в состояние обуславливается дискретными отказами элементов.

Здесь уместно привести высказывание академика Ю. Н. Руденко: «… В теории надежности появилось немало работ, которые можно рассматривать как математическое жонглирование индексами. Авторов таких работ мало волнует приложимость полученных ими результатов к практике проектирования и эксплуатации систем. Идет как бы саморазвитие науки неинтересное в математическом аспекте и бесполезное в прикладном смысле. Это одна из причин скептицизма относительно возможностей теории надежности. Другая причина заключается в незнании или непонимании того, что можно и нужно требовать от теории надежности в процессе создания систем, и чего нельзя……» [Руденко, 1976, с. 7].

Возможности предлагаемого методологического подхода

С целью устранения влияния вышеотмеченных причин в расчётах безотказности, в работах [Бойко, 2013, с. 73; Бойко, 2014, с. 84] предложен методологический подход, в котором теоремы умножения и сложения вероятностей не используются. На его основе разработаны методы для систем с общим или раздельным резервированием, а также для сложных систем. В [Фурманова, 2014, с. 154; Бойко, 2012, с. 87] приведены результаты экспериментального подтверждения разработанных методов.

Подход основан на предположении о том, что, при стационарном процессе, вероятность отказа элемента системы определяется суммарным потоком отказов всех элементов, составляющих работоспособную часть системы, и их предшествующей наработкой. Подход обеспечивает возможность определения временных интервалов, на которых элементы системы отказывают, и учета изменения структуры системы по мере развития в ней отказов.

Рассмотрим мажоритарную систему, приведенную на *рис. 1*. Примем, что все элементы системы одинаковы и начинают работать одновременно. На временном отрезке [0, *t*], точки отказов этих элементов будут распределены случайным образом. В связи с этим, правомерно считать поток отказов элементов случайным, а его плотность для системы определять как сумму плотностей потоков отказов элементов, составляющих систему. Поскольку в выражении (1) функция распределения вероятности отказов элементов не задана, то для стационарных процессов эксплуатации и наглядности результатов примем для моделирования вероятности отказов элементов распределение равномерной плотности вида

$$q(t) = \begin{cases} f(t)\cdot t & \text{при} \quad 0 \le t \le 2\overline{T} \\ 1 & \text{при} \quad t \ge 2\overline{T} \end{cases} \qquad (4)$$

где $\bar{T}$ – средняя наработка элемента на отказ (математическое ожидание), $f(t)$ – плотность вероятности вида

$$f(t)=\begin{cases}0 \quad \text{при} \quad t<0, \quad t>2\bar{T} \\ \dfrac{1}{2\bar{T}}, \quad 0 \le t \le 2\bar{T}\end{cases}.$$

Следует отметить, что использование распределения равномерной плотности не сужает область применимости полученных результатов. В работе [Бойко, 2011, с. 131] рассмотрена возможность применения предложенных в [Бойко, 2013, с. 73; Бойко, 2014, с. 84] методов при переменных параметрах потоков отказов и, следовательно, переменных плотностях вероятностей $f(t)$ элементов.

В соответствии с предложенным подходом, вероятность первого отказа элемента в системе определится как

$$q_1(t)=f_{\sum}\cdot t\,, \qquad (5)$$

где $f_{\sum} = 5\cdot f$, поскольку в системе 5 одинаковых элементов.

Тогда верхняя граница интервала $[0, t_1]$, на котором откажет первый элемент с вероятностью равной единице, в соответствии с (5) будет

$$t_1=\frac{q_1(t)}{f_{\sum}}=\frac{1}{5\cdot f}\,. \qquad (6)$$

После отказа первого элемента, поток отказов элементов станет меньше на величину f, а вероятность отказа второго элемента выразится в виде

$$q_2(t)=4f\cdot(t_1+\Delta t_2)\,, \qquad (7)$$

где Δt_2 – есть протяженность интервала $[t_1, t_2]$, на котором реализуется второй отказ в системе.

Положив вероятность $q_2(t) = 1$, определим Δt_2 в виде

$$\Delta t_2=\frac{1-4ft_1}{4f}\,. \qquad (8)$$

При этом $t_2=t_1+\Delta t_2$.

Подобным же образом определим протяженность

$$\Delta t_3=\frac{1-3ft_2}{3f}\,, \qquad (9)$$

и время t_3, как верхнюю границу интервала третьего отказа

$$t_3 = t_2 + \Delta t_3 .$$

Далее аналогично

$$\Delta t_4 = \frac{1 - 2 f t_3}{2f}, \qquad (10)$$

$$t_4 = t_3 + \Delta t_4 .$$

Поскольку рассматриваемая мажоритарная система отказывает после отказа в ней четырех элементов, то отказ каждого из них увеличивает вероятность отказа системы на 0,25. Таким образом, вероятность отказа системы в функции времени определится ее значениями

$$Q(t_1) = 0{,}25,\ Q(t_2) = 0{,}5,\ Q(t_3) = 0{,}75,\ Q(t_4) = 1.$$

Функция распределения вероятности отказа мажоритарной системы при $f = 0{,}01$ ч$^{-1}$ приведена на *рис. 5*.

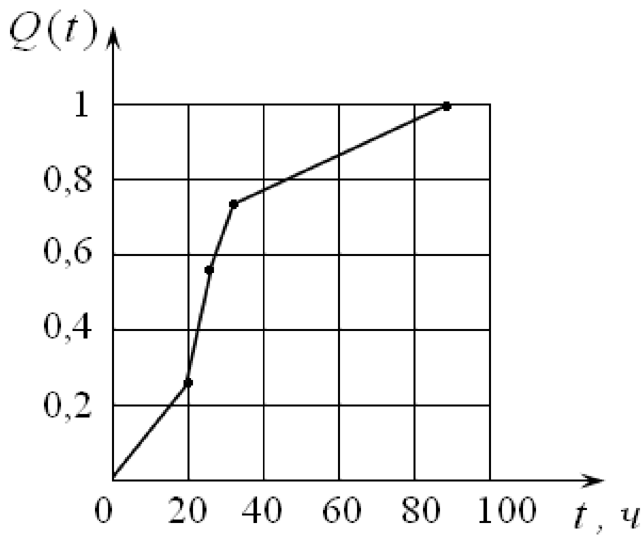

Рис. 5. Функция распределения вероятности отказа мажоритарной системы (при расчёте без использования теоремы умножения вероятностей)

Рассмотрим расчёт мостиковой системы (*рис. 3*) при использовании распределения равномерной плотности и одинаковых элементах. Поскольку число элементов в мостиковой и мажоритарной системах одинаково, то отказ очередного элемента, в любой из них, уменьшает суммарную плотность потока отказов $f_{\sum}$ на величину f. При этом приведенные выше выражения для расчёта интервалов времен отказов элементов (5) – (9), полученные для мажоритарной системы, останутся справедливыми и для мостиковой. Тогда при отказе мостиковой системы по сценарию с отказом двух элементов вероятности отказа системы будут $Q(t_1)$ = 0,5, $Q(t_2)$ = 1, и при отказе трех элементов $Q(t_1)$ = 0,333, $Q(t_2)$ = 0,666 и $Q(t_3)$ = 1.

Изменение вероятности отказа мостиковой системы по двум сценариям приведено на *рис. 6.*

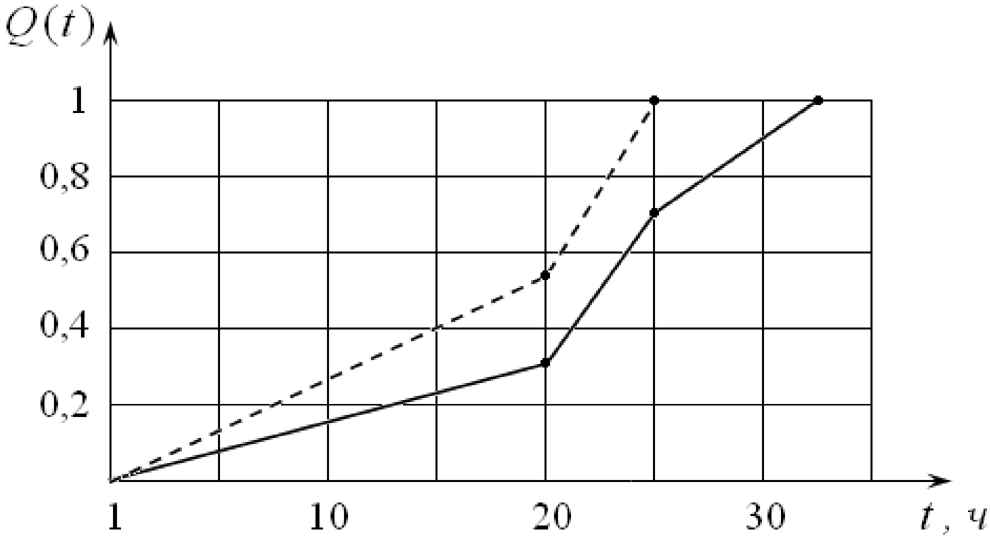

Рис. 6. Функция распределения вероятности отказа мостиковой системы (при расчёте без использования теоремы умножения вероятности):

\- - - - по сценарию с отказом двух элементов;

___ - по сценарию с отказом трех элементов

Если обратиться к функциям распределения вероятности отказа мостиковой системы *рис. 6*, при ее отказе по сценариям с отказом двух и трех элементов, то сумма вероятностей сценариев будет как меньше единицы на отрезке времени [0, 21] ч, так и больше единицы на отрезке [21, 25] ч. Этот результат вполне соответствует положению о некорректности применения теоремы сложения вероятностей к интегральным функциям распределения.

Выводы

В работе показано, что результаты, полученные по традиционному методу, не соответствуют поставленным начальным условиям. В соответствии с ними, отказ мажоритарных и сложных систем достигается только вследствие отказа всех элементов.

Обосновано, что при использовании теоремы сложения вероятностей в расчётах надежности систем, отказ которых может реализоваться по различным сценариям, необходимо давать себе отчет в том, складываются ли вероятности случайных событий, либо интегральные функции распределения вероятности, и понимать, чем отличаются события от случайных величин.

В работе показано, что расчёт безотказности мажоритарных систем и систем, расчёт которых не сводится к схеме последовательного и параллельного соединения элементов, может быть выполнен только с использованием суммарной плотности потока отказов элементов, составляющих систему с учётом их наработки.

Установлено, что изменение структуры системы определяет, с одной стороны, уменьшение суммарной плотности потока отказов системы при отказе одного из элементов, с другой стороны, величину, на которую возрастает вероятность ее отказа.

Библиографический список

1. *Bazovsky I.* Reliability. Theory and practice.-London: Prentice-Hall International Publ., 1961. 373 p.

2. *Бойко О. Г.* Метод решения задачи расчёта надежности сложных систем при переменных параметрах потоков отказов агрегатов / О. Г. Бойко // Вестник СибГАУ. 2011. № 3 (36). С. 131–136.

3. *Бойко, О. Г.* Об одном из направлений оптимизации структуры функциональных систем самолетов / О. Г. Бойко, Е. А. Фурманова // Проблемы и перспективы развития авиации, наземного транспорта и энергетики «АНТЭ-2013»: материалы Международной научно-технической конференции. − Казань: КНИТУ-КАИ, 2013. − С. 73−79.

4. *Бойко О. Г.* Методологический подход и методы оценки вероятности катастроф вследствие отказов функциональных систем самолетов // Труды Международного симпозиума «НАДЕЖНОСТЬ И КАЧЕСТВО» / О. Г. Бойко, Е. А. Фурманова, Л. Г. Шаймарданов. Пенза: ПГУ, 2014. Т. 1. С. 84–87.

5. *Бойко О. Г.* Экспериментальное исследование процесса изменения надежности восстанавливаемых систем // Труды Международного симпозиума «НАДЕЖНОСТЬ И КАЧЕСТВО» / О. Г. Бойко, Е. А. Фурманова, Л. Г. Шаймарданов. Пенза: ПГУ, 2014. Т. 1. С. 87–90.

6. *Венцель Е. С.* Теория вероятностей. М.: Государственное изд. Ф-М. литературы, 1962. 563 с.

7. *Венцель Е. С. Овчаров Л. А.* Теория Вероятностей и ее инженерные приложения. М.: Наука, 1988. 476 с.

8. *Гнеденко Б. В.* Математические методы в теории надежности. Основные характеристики надежности и их статистический анализ. М.: Наука, 1965. 524 с.

9. *Печкин А. В.* Теория вероятностей: учеб. для вузов / А. В. Печкин, О. И. Тескин, Г. М. Цветкова. 3-е изд., испр. М.: Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 2004. 456 с.

10. *Руденко Ю. Н.* Методические вопросы исследования надежности больших систем энергетики // Известия АН СССР. Энергия и транспорт. 1976. № 1. С. 7–17.

11. *Рябинин И. А.* Надёжность и безопасность структурно-сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2007. 276 с.

12. *Сифоров В. И.* О методах расчёта надёжности работы систем, содержащих большое число элементов // Известия Академии наук СССР. Отделение технических наук. № 6. 1954 г. С. 3–12.

13. *Сугак Е. В.* Надежность технических систем. Красноярск: МПГ «Раско», 2001. 608 с.

14. *Tribus M.* Thermostatics and Thermodynamics. An Introduction to Energy, Information and States of Matter, with Engineering Applications. - Princeton, New Jersey: D. Van Nostrand Company Publ., 1965. 504 p.

15. *Фурманова Е. А*. К вопросу о моделировании процесса отказов-восстановлений в функциональных системах самолетов гражданской авиации / Е. А. Фурманова, О. Г. Бойко, Л. Г. Шаймарданов // Авиамашиностроение и транспорт Сибири: сборник статей IV Всерос. научн.-техн. конф. Иркутск: ИрГТУ, 2014. С. 154-162.