

УДК 351.814.33

ББК 39.57

DOI 10.51955/2312-1327_2021_1_6

О НАГЛЯДНОМ ГЕОМЕТРИЧЕСКОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ В ПРОСТРАНСТВЕ И ВРЕМЕНИ НА ПРИМЕРЕ ВОЗДУШНОГО ДВИЖЕНИЯ

*Александр Петрович Плясовских,
orcid.org/0000-0003-2250-8852*

доктор технических наук

*главный конструктор научно-технического центра организации воздушного движения
(НТЦ ОрВД) АО «Ордена Трудового Красного Знамени Всероссийский научно-исследовательский
институт радиоаппаратуры»,
пр. Обуховской обороны, д.120
Санкт-Петербург, 192012, Россия
disput100@yandex.ru*

Аннотация. В работе изложен новый, оригинальный метод наглядного геометрического представления движения материальной точки (или воздушного судна) в пространстве и времени. Актуальность предлагаемого метода обусловлена недостатками традиционного метода представления движения в пространстве-времени, одной из координат которого является независимое от пространственных координат время. В таком пространстве-времени не определено понятие расстояния между двумя его точками, не определены понятия угла, треугольника, геометрических фигур, в нем невозможно использовать евклидову геометрию. Автор предлагает использование четырёхмерного евклидова пространства с четвертой осью $z = bt$, где b – постоянная скорости, t – время, для представления движения материальной точки (воздушного судна) в пространстве и времени. Движение материальной точки (воздушного судна), представленное с использованием предложенного автором пространства, является наглядным, линия движения имеет геометрический смысл линии евклидовой геометрии. Приведены примеры представления четырёхмерного движения воздушного судна по участку маршрута, понятие четырёхмерного коридора движения воздушного судна. Показана возможность использования предлагаемого метода для описания и исследования движения материальной точки (воздушного судна) в пространстве и времени. Метод открывает новое направление исследований движения материальных точек и других материальных объектов в пространстве и времени с использованием многомерной и, в частности, четырёхмерной геометрии. Значение предлагаемого в статье подхода состоит в том, что он открывает новые направления научных исследований в таких науках как физика (не релятивистская механика), навигация и управление воздушным движением, космическая механика, и во многих других науках, где исследуются процессы движения различных объектов в пространстве и времени. Автор планирует в дальнейшем продолжить публикацию полученных с использованием предложенного метода результатов, которые не вошли в данную работу из-за ограничений по объёму статьи.

Ключевые слова: управление воздушным движением, 4D траектория, 4D пространство, материальная точка, многомерная геометрия, пространство-время.

CONCERNING THE GEOMETRIC VISUALIZATION OF PARTICLE MOTION IN SPACE AND TIME ON THE EXAMPLE OF AIR TRAFFIC

Aleksandr P. Plyasovskikh
orcid.org/0000-0003-2250-8852

Doctor of Engineering Science

Chief designer of the scientific and technical center of air traffic management
JSC All-Russian Research Institute of Radio Equipment awarded with the Order of Red
Banner,

Obukhovskoy Oborony Ave., 120

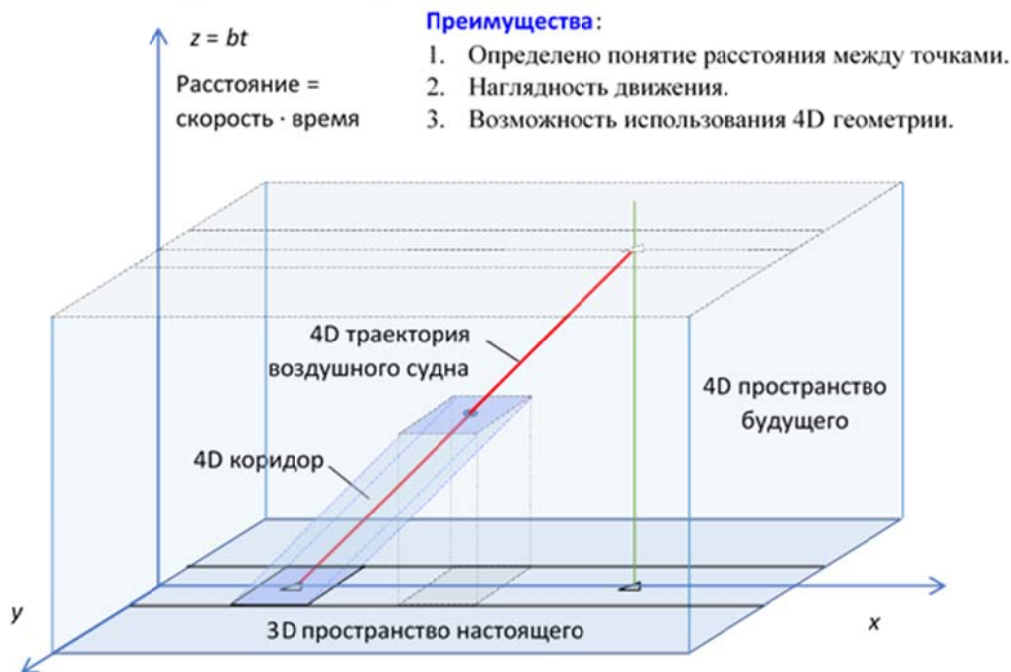
St. Petersburg, 192012, Russia

disput100@yandex.ru

Abstract. The article presents a new original method of geometric visualization of particle (or aircraft) motion in space and time. The urgency of the proposed method stems from disadvantages of the traditional method of presenting the motion in space-time having as one of its coordinates the time which is independent on spatial coordinates. In this space-time, the concept of distance between two points is not defined, the concepts of angle, triangle, geometric figures are not defined as well, it does not allow Euclidian geometry to be used. The author proposes the use of four-dimensional Euclidian space with the fourth axis $z = bt$ where b is a speed constant, t is time, for presenting the motion of a particle (aircraft) in space and time. The particle (aircraft) motion presented with the use of the space proposed by the author is a visualized one, the track makes geometric sense of a Euclidian geometry line. The examples of presenting the four-dimensional motion of an aircraft along its route are given, the concept of four-dimensional corridor of aircraft motion is defined. It is shown that the proposed method could be used for description and research of particle (aircraft) motion in space and time. The method opens up a new direction of research of particles and other material objects moving in space and time with the use of multi-dimensional, in particular, four-dimensional geometry. The importance of the approach proposed in the article is that it opens new directions of scientific research in such sciences as physics (not relativistic mechanics), navigation and air traffic control, space mechanics and many other sciences in which processes of motion of different objects in space and time are researched. The author is going to continue publishing the results obtained due to the proposed method which are not included in the present paper because of space limitations.

Key words: air traffic control, 4D trajectory, 4D space, material particle, multidimensional geometry, space-time.

Наглядное геометрическое представление 4D движения воздушного судна



Ясно, – продолжал Путешественник во Времени, – что всякое реальное тело должно обладать протяженностью по четырем измерениям, то есть должно иметь длину, ширину, высоту и продолжительность существования.
Герберт Уэллс. Машина времени

Введение

В настоящей работе излагается ноу-хау автора: метод наглядного геометрического представления движения материальной точки в пространстве и времени на примере воздушного движения. Проблема, которая решается в настоящей статье, заключается в том, что движение, представленное в пространстве и времени, не является наглядным. В этой работе рассматривается движение материальной точки и воздушного судна (ВС). Движение материальной точки (или ВС) в пространстве-времени, представляющем собой множество четырёхмерных точек $(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{x} = (x, y, h)$, где $\mathbf{x}$ – вектор пространственных координат, x, y – координаты материальной точки (ВС) в горизонтальной плоскости, h – высота, t – время, представленное в виде линии движения в этом пространстве, не является наглядным, так как расстояние между двумя точками M_1 и M_2 с координатами $(\mathbf{x}_1, t_1)$ и $(\mathbf{x}_2, t_2)$ в пространстве-времени, как это показано в работе, не определено. Линия движения в таком пространстве-времени не имеет длины, протяженности, в том смысле, что невозможно определить расстояние между какими-либо двумя точками этой линии. В силу этого линия движения в пространстве-времени не имеет геометрического смысла линии евклидова пространства. В пространстве-времени не определены понятия вектора, угла, окружности, треугольника и других имеющих размеры геометрических фигур. В пространстве-времени

невозможно применять евклидову геометрию для исследования движения материальной точки (или ВС).

В настоящей работе предпринимается попытка математически связать пространство и время, придав тем самым движению наглядный, и потому интуитивно понятный геометрический смысл. Для этого в работе используется математический прием замены переменной: время заменяется на величину времени, умноженную на некоторую константу скорости. То есть в геометрическом представлении движения переменная t (время) заменяется на переменную $z = bt$ (расстояние, пройденное материальной точкой с постоянной скоростью b за время t).

Подчеркнём, что это чисто математический прием, не претендующий на философское объяснение взаимосвязи пространства и времени в нашем физическом мире.

Такая замена переменной делает движение материальной точки геометрически наглядным и понятным.

С одной стороны, представив движение материальной точки в воображаемом четырёхмерном пространстве, в котором тремя координатными осями описывается трехмерное евклидово пространство, а четвертой осью описывается воображаемое равномерное движение, при котором четвертая координата z изменяется в соответствии с выражением $z = bt$, мы получаем наглядное геометрическое представление четырёхмерного движения.

С другой стороны, такое представление позволяет ввести в рассматриваемом четырёхмерном пространстве метрику, то есть определение расстояния между любыми точками пространства. Понятие расстояния между точками позволяет, в свою очередь, использовать хорошо развитую четырёхмерную евклидову геометрию для изучения четырёхмерного движения ВС.

Таким образом, цель настоящей работы состоит в том, чтобы придать движению простой геометрический смысл и сделать представление движения простым для понимания и наглядным. Вторая цель: обосновать возможность использования многомерной евклидовой геометрии для изучения многомерного (включая четырёхмерное) движения материальной точки или ВС. Представленный в работе метод является новаторским. Он открывает, по сути, новое направление исследований движения материальных точек и других объектов в пространстве и времени с использованием многомерной и, в частности, четырёхмерной геометрии.

В работе представлено описание четырёхмерной линии движения ВС с постоянной скоростью, а также описание четырёхмерного коридора воздушного движения. Представлена четырёхмерная модель прошлого, настоящего и будущего. Обоснована возможность использования предлагаемого метода для исследования движения материальной точки и других объектов в пространстве и времени.

В продолжении этой работы будет изложены не вошедшие в эту часть другие результаты, связанные с описанием четырёхмерного движения ВС.

Методы (Теоретическая база)

О пользе наглядного геометрического представления аналитических выражений

Рассмотрим следующий пример [Математика..., 1956]. Имеется неравенство $x^2 + y^2 < N$. Задача состоит в том, чтобы определить, сколько целочисленных решений имеет это неравенство при $N \rightarrow \infty$. В алгебраической форме эту задачу решить довольно трудно. (Предлагаем читателю попробовать сделать это самостоятельно.)

Однако эту задачу можно представить в геометрической форме. Для этого рассмотрим x и y как целочисленные декартовы координаты на плоскости (рис. 1).

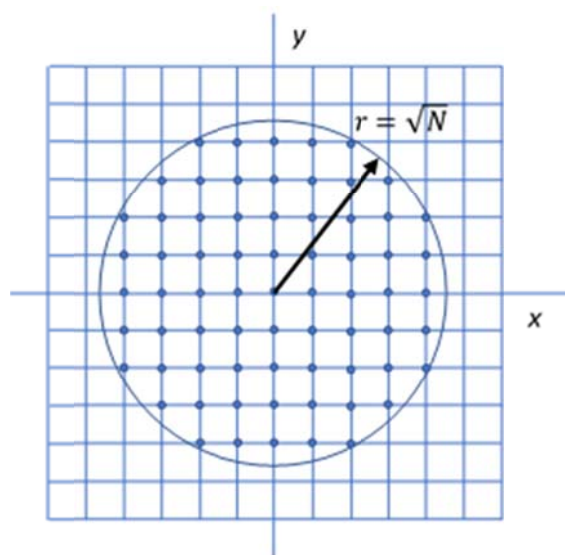


Рисунок 1 – Наглядное представление задачи

В таком представлении задача сводится к ответу на вопрос: сколько точек с координатами (x, y) , где x и y – целые числа, содержится внутри круга радиуса $r = \sqrt{N}$? Точки с целочисленными координатами – это вершины квадратов со стороной единичной длины, покрывающих плоскость (рис. 1). Число таких точек внутри круга приближенно равно числу квадратов, лежащих внутри круга, то есть приближенно равно площади круга радиуса $\sqrt{N}$, или числу πN . Это дает ответ задачи: число целочисленных решений неравенства при $N \rightarrow \infty$ приближенно равно πN .

Таким образом, наглядное геометрическое представление задачи, поставленной в аналитическом виде, позволило довольно просто получить результат, далеко не очевидный с точки зрения «чистой алгебры».

Геометрическое представление задач, поставленных в аналитическом виде, которое делает абстрактную математику наглядной, зачастую оказывается полезным, помогает подключить к процессу решения не только математическую логику, но и геометрическую интуицию и повседневный опыт, которые помогают ориентироваться в окружающем пространстве. В математике сложно переоценить практическое значение, например,

геометрического представления производной функции в точке как углового коэффициента касательной к графику этой функции в этой точке.

В теории вероятностей геометрическое представление интеграла, как площади фигуры, ограниченной сверху плотностью вероятности, слева и справа – пределами интегрирования, также бесценно. Оно позволяет зачастую просто решать сложные вероятностные задачи.

Но, как мы увидим ниже, обычное движение материальной точки в пространстве и времени представить в наглядном виде оказывается довольно сложно.

О не наглядности представления движения материальной точки в пространстве и времени

Рассмотрим следующий пример. Пусть в момент времени t_1 материальная точка имеет координату x_1 на оси x , а в момент времени t_2 эта материальная точка переместилась в координату x_2 (рис. 2). Соединив точки M_1 и M_2 с координатами (x_1, t_1) и (x_2, t_2) , получим траекторию или линию движения L материальной точки в одномерном пространстве и времени, которая изображена на рис. 2.

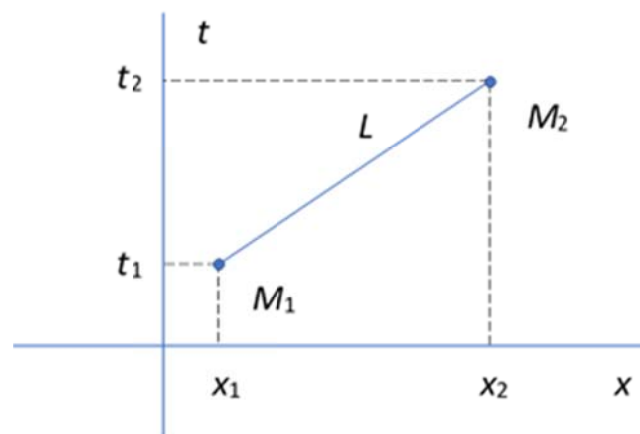


Рисунок 2 – Линия движения материальной точки в одномерном пространстве и времени

Линия, по Евклиду, это «длина без ширины» [Начала Евклида..., 1949-1951]. Но какова длина линии движения в пространстве и времени? Иными словами, какое расстояние проходит материальная точка, переместившись из точки M_1 в точку M_2 одновременно в пространстве и времени?

Только в пространстве материальная точка перемещается на расстояние $\Delta x = x_2 - x_1$. В геометрическом смысле – это длина проекции линии движения L на ось x . Только во времени материальная точка перемещается на интервал времени (на «расстояние» по временной оси) $\Delta t = t_2 - t_1$. В геометрическом смысле – это длина проекции линии движения L на ось t .

Но мы не можем определить, измерить пройденное материальной точкой расстояние одновременно в пространстве и во времени. Причина этого состоит

в том, что в пространстве и времени, заданном множеством точек (x, t) , не определена метрика $\rho(M_1, M_2)$, то есть расстояние между точками M_1 и M_2 .

В евклидовом двумерном пространстве с прямоугольной системой координат Oxy расстояние между двумя точками M_1 и M_2 с координатами (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , определяется выражением [Бондаренко и др., 2017]

$$\rho_{xy}(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Если чисто формально в пространстве с системой координат Oxt (рис. 2) расстояние между точками M_1 и M_2 определить аналогичным образом, то мы получим:

$$\rho_{xt}(M_1, M_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (t_2 - t_1)^2}.$$

Для того чтобы рассчитать расстояние по этой формуле, нужно величину в единицах длины возвести в квадрат, прибавить к результату возведенную в квадрат величину в единицах времени и из полученного результата извлечь квадратный корень. То есть, по этой формуле расстояние = $\sqrt{\text{расстояние}^2 + \text{время}^2}$. Очевидно, что это лишено какого-либо математического смысла.

Именно поэтому в пространстве и времени Oxt расстояние между какими-либо двумя точками, заданными координатами x и t , определить невозможно. Это расстояние не определено в силу того, что в пространстве и времени Oxt не определена метрика.

Таким образом, в пространстве-времени Oxt траектория, то есть линия движения представляет собой линию без длины. На этой траектории невозможно определить расстояние между какими-либо двумя ее точками.

Итак, представление движения материальной точки в пространстве-времени Oxt (рис. 2) не наглядно, интуитивно не понятно. И действительно, что из себя представляет линия, то есть «длина без ширины», которая не имеет длины? «Длина без ширины», которая не имеет длины, лишена смысла. Линия движения в пространстве-времени геометрически (в смысле евклидовой геометрии) представлена быть не может.

В пространстве-времени невозможно задать вектор

Вектор в геометрии — это математическая структура, которая характеризуется, во-первых, направлением, и во-вторых, его длиной. Но если длину вектора в каком-либо пространстве определить невозможно (по определению длина вектора — это расстояние между точками его начала и конца), то в таком пространстве невозможно определить вектор, ввести понятие вектора.

И действительно, что есть вектор в пространстве-времени (рис. 3)? Вектор без длины, вектор с неопределённым расстоянием между точками его начала и конца — это, строго говоря, не вектор.

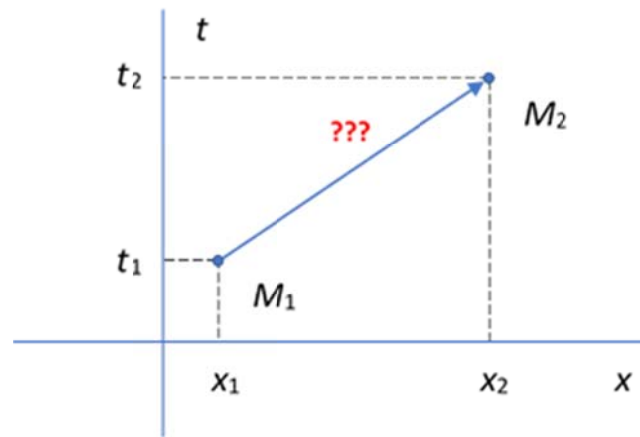


Рисунок 3 – Вектор в пространстве и времени определить невозможно

В пространстве-времени невозможно определить угол

В пространстве и времени, представленном на рис. 4, невозможно также определить угол. В прямоугольном треугольнике синус угла определяется как отношение длины противолежащего катета к длине гипотенузы. Но как определить синус угла в треугольнике, длины сторон которого не определены? Это невозможно.

В системе СИ радиан является основной единицей измерения угла. По определению радиан – это угол, соответствующий дуге, длина которой равна её радиусу. Как в соответствии с этим определить угол в пространстве, в котором невозможно определить длину радиуса и длину дуги (рис. 5)? Это риторический вопрос.

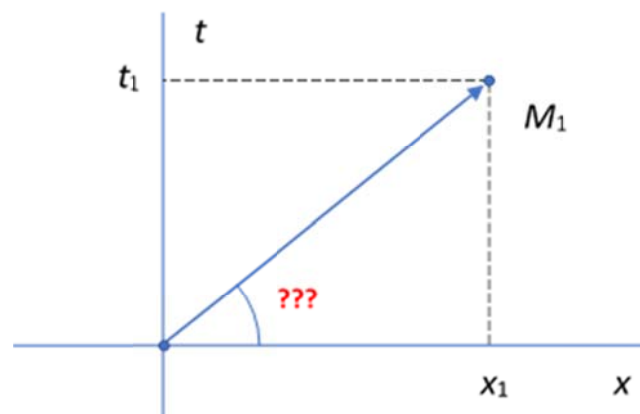


Рисунок 4 – Угол в пространстве и времени определить невозможно



Рисунок 5 – Понятие радиана (единицы измерения угла) в пространстве и времени определить невозможно

Таким образом, традиционное представление движения материальной точки на графике, который представлен осями расстояния x и времени t , не наглядно и лишено того геометрического смысла, который имеет место в евклидовой геометрии. Какой, скажем, смысл имеет расстояние между точками M_1 и M_2 на рис. 2? Это и не пространственное расстояние, это и не время. Его геометрическое понятие и его геометрический смысл не определены. В пространстве-времени, представленном с помощью такого графика не определены понятия расстояния, вектора, угла, треугольника и многих других элементарных понятий, которые имеются в традиционной евклидовой геометрии.

Наглядное представление движения материальной точки в пространстве и времени

Для того чтобы представить движение материальной точки в геометрически наглядном виде, сделаем на графике пространство-время Oxt (рис. 2) преобразование $z = bt$, где b – это константа, имеющая смысл скорости. Обоснование выбора конкретного значения константы b для исследования движения материальной точки (воздушного судна) будет приведено в продолжении этой работы. Такая замена оси t на ось $z = bt$ приводит к тому, что изменяется геометрический смысл движения материальной точки, движение становится геометрически наглядным, интуитивно понятным и простым.

Рассмотрим движение материальной точки в двумерном евклидовом пространстве с прямоугольной системой координат Oxz , в которой координата z материальной точки определяется в соответствии с выражением $z = b \cdot t$, где b – некоторая константа скорости, t – время.

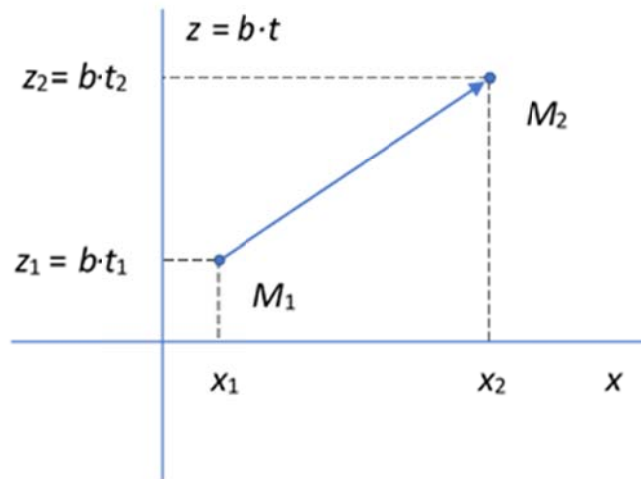


Рисунок 6 – Двухмерное евклидово пространство с осью $z = b \cdot t$

Метрика (расстояние) этого пространства определяется в соответствии с выражением:

$$\begin{aligned} \rho_{xz}(M_1, M_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (bt_2 - bt_1)^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + b^2(t_2 - t_1)^2}, \end{aligned}$$

где (x_1, z_1) и (x_2, z_2) – координаты точек M_1 и M_2 в моменты времени t_1 и t_2 , $z_1 = b \cdot t_1$, $z_2 = b \cdot t_2$.

Замена оси времени t на ось расстояния $z = bt$ приводит к тому, что в двухмерном евклидовом пространстве с системой координат Oxz :

1. Можно определить расстояние между какими-либо двумя точками, и это расстояние имеет геометрический смысл расстояния в обычном евклидовом пространстве.

2. Можно определить вектор в геометрическом смысле, то есть структуру, которая характеризуется направлением и длиной.

3. Можно определить угол и другие элементарные понятия евклидовой геометрии (треугольник, окружность, и так далее).

4. Как следствие всего предыдущего: в таком евклидовом пространстве можно использовать евклидову геометрию для описания и изучения процессов, характеризующих движение материальной точки.

Линия движения в таком пространстве приобретает наглядный и простой геометрический смысл, а именно геометрический смысл линии в евклидовом пространстве. Эта линия, как и любая другая линия евклидова пространства имеет длину в том смысле, что расстояние между любыми ее точками может быть определено и измерено. В таком пространстве могут быть определены имеющие размер геометрические фигуры. В таком четырёхмерном пространстве, например, как мы увидим ниже, может быть определен четырёхмерный коридор движения ВС с определенными размерами по всем четырем измерениям. В этом пространстве «работает», то есть может быть

использована для наглядного представления движения и для каких-либо расчетов обычная евклидова геометрия.

Заметим, что для наглядного представления движения материальной точки в одномерном пространстве (только по одной пространственной оси) и во времени требуется двухмерное евклидово пространство с двухмерной прямоугольной системой координат, по второй оси которой отображается координата $z = bt$. Для наглядного представления движения материальной точки в двухмерном или трехмерном пространстве и во времени требуется, соответственно, трёхмерное или четырёхмерное евклидово пространство с трехмерной или четырёхмерной прямоугольной системой координат, по одной из осей которой отображается координата $z = bt$.

В четырёхмерном евклидовом пространстве с четвертой осью $z = bt$ расстояние между двумя точками M_1 и M_2 с координатами (x_1, y_1, h_1, z_1) и (x_2, y_2, h_2, z_2) рассчитывается по формуле:

$$\begin{aligned}\rho_{xyhz}(M_1, M_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (h_2 - h_1)^2 + (z_2 - z_1)^2} = \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (h_2 - h_1)^2 + b^2(t_2 - t_1)^2}.\end{aligned}\quad (1)$$

Важно отметить, что выбор конкретного значения постоянной b должен быть научно обоснован. Это обоснование будет приведено в продолжении работы. Использование необоснованного значения постоянной b , имеющей смысл и размерность скорости, может привести к смысловым (методологическим) ошибкам в исследовании движения объектов в пространстве и времени.

Метод исследования

Метод исследования, который может использоваться для исследования четырёхмерного движения объектов в пространстве и времени схематично можно изобразить следующим образом (рис. 7).

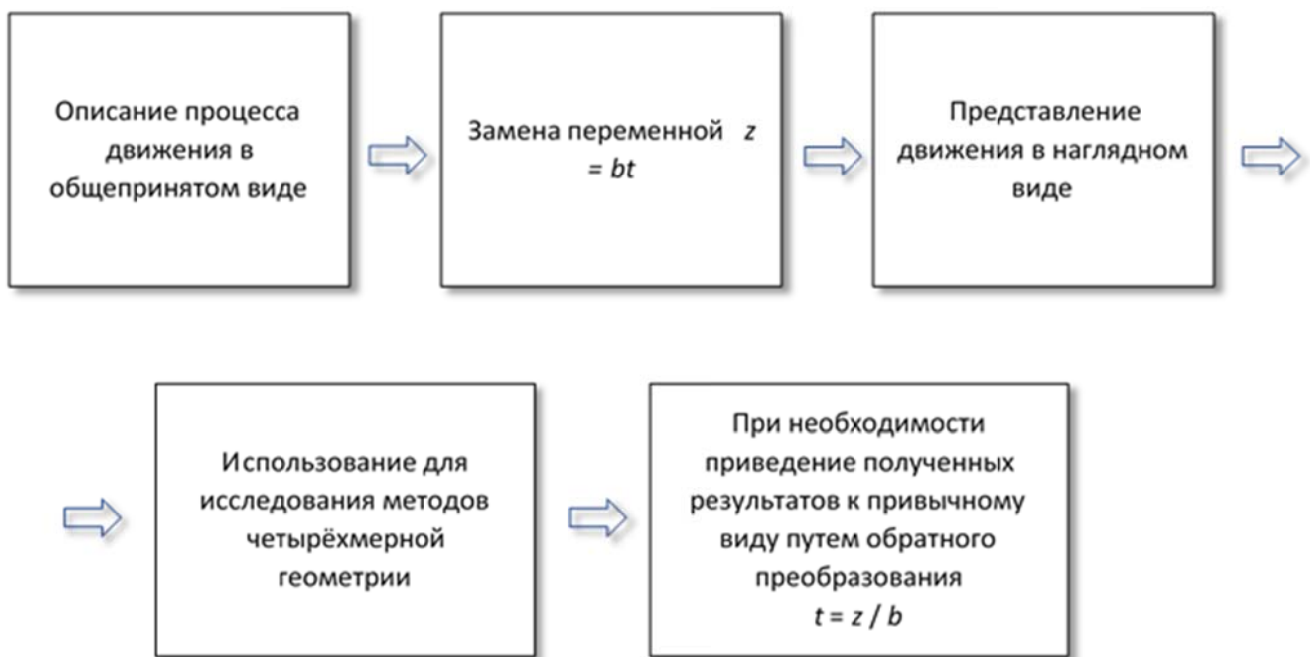


Рисунок 7 – Метод исследования

На первом этапе исследования производится формулировка целей и задач исследования, а также описание исследуемого процесса движения объектов в общепринятом виде. Движение в этом описании может быть выражено в виде параметрических уравнений, а время t может быть представлено как параметр.

На следующем этапе производится замена переменной $z = bt$. Вопрос обоснования выбора конкретного значения b требует отдельного исследования и будет рассмотрен в продолжении этой работы.

Далее осуществляется представление движения в наглядном виде. На этом этапе четырёхмерное движение может быть визуализировано с использованием двумерных или трехмерных изображений, графиков, на которых отображаются проекции четырёхмерных объектов (линий, фигур).

На следующем, самом важном, ключевом этапе производится исследование процессов движения с использованием четырёхмерной геометрии.

На заключительном этапе, при необходимости, осуществляется приведение полученных результатов к привычному виду путем обратного преобразования $t = z / b$.

Результаты

Наглядное геометрическое представление воздушного движения в четырёхмерном евклидовом пространстве

Для представления движения ВС в трехмерном пространстве и во времени в настоящее время используют понятие четырёхмерной (4D) траектории [Pasini et al., 2018; Глобальный..., 2016; The Aviation System..., 2016; Global Air Traffic..., 2005; Руководство по полетам..., 2012]. 4D траектория движения ВС представляет собой совокупность 4D точек, а 4D

точка определяется как точка, имеющая координаты (x, y, h, t) , где x и y – координаты ВС в горизонтальной плоскости, h – высота ВС, а t – время.

Рассмотрим пространство (в математическом смысле), представляющее собой множество точек (x, y, h, t) . Пусть в момент времени t_1 ВС имело координаты в трехмерном пространстве x_1, y_1 , и h_1 , иначе говоря, в рассматриваемом пространстве оно находилось в точке $M_1(x_1, y_1, h_1, t_1)$. Далее, в момент времени t_2 ВС переместилось в точку $M_2(x_2, y_2, h_2, t_2)$. Если в рассматриваемом пространстве-времени движение ВС представить в виде линии, соединяющей точки M_1 и M_2 , то эта линия, как это было показано выше, не будет иметь длины, в том смысле, что между двумя точками этой линии расстояние не определено. В этом пространстве-времени не задано фундаментальное понятие, определяющее геометрические свойства пространства, не задана метрика пространства. Отсюда следует, что движение ВС, заданное 4D траекторией, геометрически не наглядно, не имеет простого геометрического смысла.

Для наглядного представления движения ВС в трехмерном пространстве и во времени введем четырехмерное евклидово пространство с четырехмерной прямоугольной системой координат $Oxyz$, аналогичное двумерному евклидову пространству с двумерной прямоугольной системой координат Oxz , представленному на рис. 6.

В системе координат $Oxyz$ по осям x, y и h будем отображать координаты ВС в трехмерном пространстве, а по оси z будем откладывать координату $z = bt$.

В таком представлении движения ВС мы получим четырехмерную линию движения ВС, имеющую геометрический смысл обычной линии в четырехмерном евклидовом пространстве. Эта четырехмерная линия движения будет обладать длиной (между двумя ее точками можно определить расстояние). Между двумя такими прямыми линиями можно определить угол. На такой четырехмерной линии движения можно определить направляющий вектор. И что самое главное: для описания и исследования движения ВС в таком представлении можно использовать четырехмерную евклидову геометрию (при правильном и обоснованном выборе коэффициента b , который определяет взаимосвязь между временем t и четвертой координатой $z = bt$).

Наглядное геометрическое представление четырехмерного движения ВС по участку трассы

Рассмотрим следующий пример. Пусть в некоторой зоне обслуживания воздушного движения (ОВД) имеется воздушная трасса (прямолинейный участок маршрута) L , которая задается уравнениями:

$$\frac{x - x_0}{e_x} = \frac{y - y_0}{e_y}$$

где e_x и e_y – составляющие направляющего вектора воздушной трассы (участка маршрута) $\vec{s} = (e_x, e_y)$;

x_0 и y_0 – координаты точки (пункта маршрута), через которую проходит воздушная трасса.

Очевидно, что

$$\begin{cases} e_x = \sin \beta \\ e_y = \cos \beta, \end{cases}$$

где β – путевой угол участка маршрута в пункте маршрута.

Примечание. *Путевой угол* (ПУ) – это угол, заключенный между северным направлением меридиана и направлением линии пути. ПУ отсчитывается по часовой стрелке от направления на географический север.

Если ВС проходит через пункт маршрута $M(x_0, y_0)$ в момент времени t_0 и следует с путевой скоростью W , то четырёхмерную линию движения ВС по участку маршрута L можно задать уравнениями

$$\frac{x-x_0}{W_x} = \frac{y-y_0}{W_y} = \frac{h-h_0}{W_h} = \frac{z-z_0}{b},$$

где W_x и W_y – горизонтальные составляющие скорости ВС по осям x и y ;

W_h – вертикальная скорость ВС;

h_0 – высота ВС в пункте маршрута;

$z_0 = bt_0$;

b – некоторая константа скорости.

Горизонтальные составляющие скорости ВС W_x и W_y определяются уравнениями:

$$\begin{cases} W_x = W \sin \beta \\ W_y = W \cos \beta. \end{cases}$$

На рис. 8а представлена линия участка маршрута L в двухмерной плоскости Oxy . На рисунке точкой (треугольником) M обозначен пункт маршрута, который находится на участке маршрута. На рис. 8б красным цветом представлена четырёхмерная линия движения ВС L' по участку маршрута L . На рис. 8 для упрощения рисунка и улучшения его наглядности не изображена ось h высоты ВС.

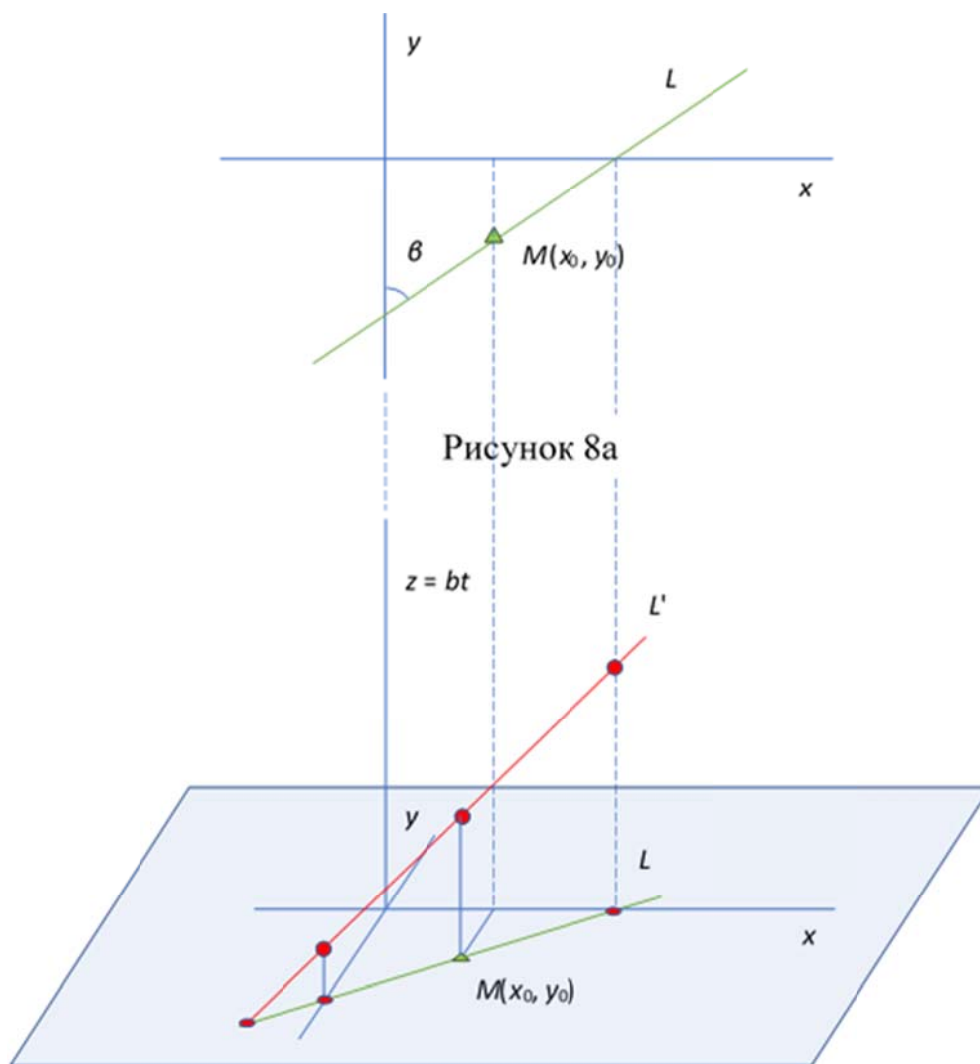


Рисунок 8б

Прошлое, настоящее и будущее в четырёхмерном пространстве

На рис. 9 представлено 4D пространство. На рисунке горизонтальной плоскостью условно изображено трехмерное пространство настоящего, которое имеет место в текущий, нулевой момент времени $t = 0$. Мы предполагаем, что в этот момент времени материальная точка, траектория движения которой в 4D пространстве изображена красной линией, находится в начале координат. Выше трехмерного пространства настоящего на рисунке изображена область 4D пространства будущего, которое имеет место при $t > 0$. Ниже трехмерного пространства настоящего изображена область 4D пространства прошлого, которое имеет место при $t < 0$.

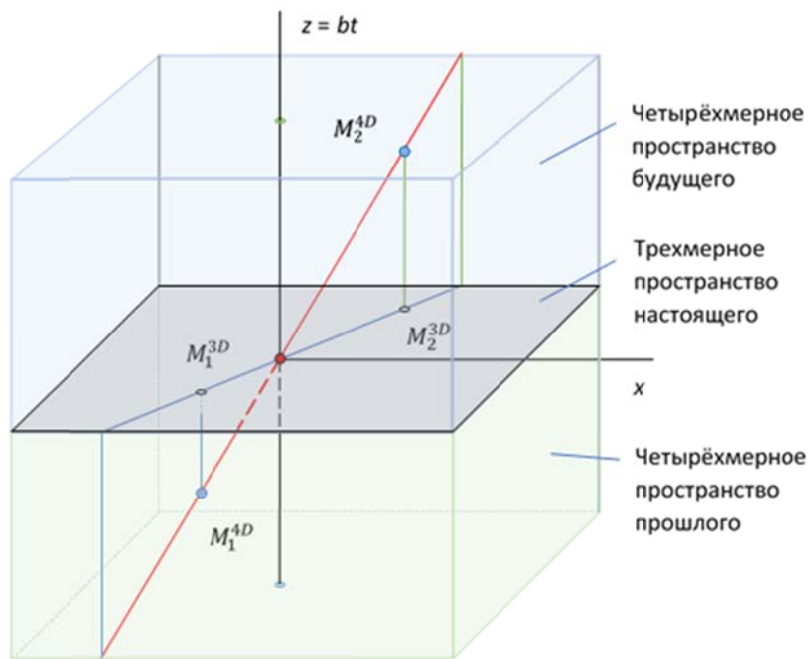


Рисунок 9 – Прошлое, настоящее и будущее

Линия движения: прошлое, настоящее и будущее

Для того чтобы понять, как взаимосвязано движение материальной точки в прошлом, настоящем и будущем, рассмотрим движение реактивного самолета в небе. Для упрощения картины можно представить себе равномерное прямолинейное движение кончика карандаша по листу бумаги – суть от этого не меняется.

Пусть в момент времени $t = 0$ самолет находится в начале четырехмерной системы координат. ВС оставляет за собой спутный след. Рассмотрим точку истории движения самолета, или же точку спутного следа, в трехмерном пространстве, обозначенную на рис. 9 как M_1^{3D} . Для наблюдателя в трехмерном пространстве эта точка является неподвижной. Она имеет координаты (x_1, y_1, h_1) . В четырехмерном пространстве эта же точка имеет координаты $(x_1, y_1, h_1, 0)$.

Теперь переместимся в прошлое, в точку M_1^{4D} четырехмерного пространства, которая имеет координаты (x_1, y_1, h_1, z_1) , $z_1 = bt_1$. Это точка истории для трехмерного пространства. В момент времени t_1 ВС находилось в трехмерном пространстве именно в этой точке, то есть имело координаты (x_1, y_1, h_1) . Можно заметить, что точка $M_1^{3D}(x_1, y_1, h_1)$ трехмерного пространства является проекцией точки $M_1^{4D}(x_1, y_1, h_1, z_1)$ на трехмерное пространство настоящего.

Продолжая аналогичные рассуждения для всех точек истории движения, или спутного следа самолета, можно прийти к очевидному выводу, что линия истории движения ВС (линия спутного следа) в трехмерном пространстве настоящего является проекцией четырехмерной линии движения ВС на трехмерное пространство.

Теперь рассмотрим будущее, точку $M_2^{4D}(x_2, y_2, h_2, z_2)$ четырехмерного пространства, $z_2 = bt_2$. Соответствующая ей точка трехмерного пространства –

это точка $M_2^{3D}(x_2, y_2, h_2)$. Данная точка M_2^{3D} является плановым местоположением ВС в момент времени t_2 . Когда наступит момент времени $t = t_2$, ВС в ней окажется. Рассуждая также, как и в отношении прошлого, можно прийти к выводу, что все точки трехмерной плановой линии движения ВС являются проекциями соответствующих точек четырехмерной линии будущего на трехмерное пространство настоящего. Поэтому плановая линия движения ВС в трехмерном пространстве настоящего представляет собой проекцию четырехмерной линии движения будущего на трехмерное пространство настоящего.

Заметим, что мы рассматриваем не физическую реальность, а математическую четырехмерную модель движения материальной точки, в которой логические рассуждения о прошлом, настоящем и будущем не противоречат здравому смыслу и нашему представлению о физическом мире, о физической реальности. Эти рассуждения показывают, что расчеты, выводы и результаты, полученные с использованием математической модели четырехмерного движения, не будут противоречить объективной реальности. Таким образом, представленная математическая четырехмерная модель движения может быть использована для описания и исследования объективной реальности.

Отображение четырехмерного движения ВС, следующих друг за другом по одному участку маршрута

На рис. 10 линиями L' и L'' представлены четырехмерные траектории движения двух ВС, которые следуют по одному и тому же участку маршрута L с продольным интервалом.

Проекции четырехмерных линий L' и L'' на трехмерное пространство настоящего будут сливаться друг с другом (налагаются одна на другую). Отображение же этих линий в четырех измерениях наглядно показывает, что между ВС имеется продольный интервал.

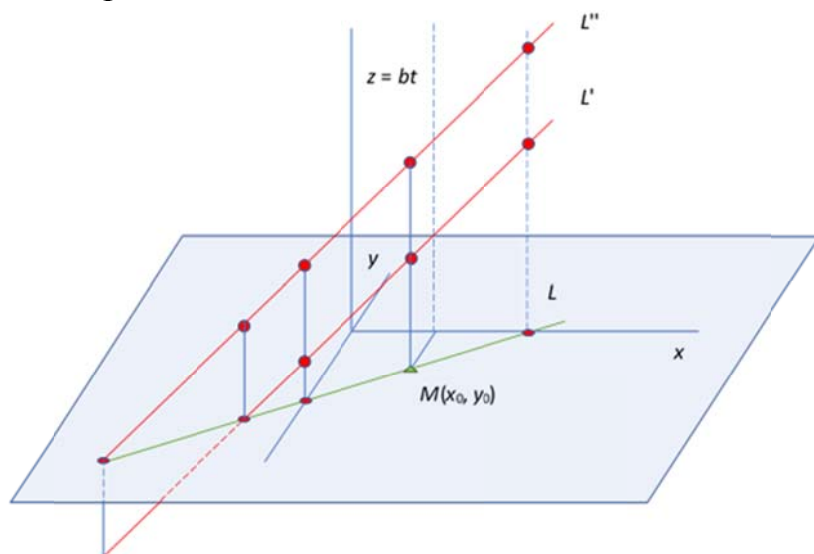


Рисунок 10 – Четырехмерное движение двух следующих в попутном направлении ВС

Понятие 4D коридора воздушного движения

4D коридором воздушного движения будем называть установленную для каждого ВС область четырёхмерного пространства, в пределах которой должен выполняться полет ВС. 4D коридор воздушного движения ограничен по размерам во всех четырёх измерениях. 4D коридор воздушного движения проходит в пределах трехмерного воздушного коридора. Воздушным коридором называют ограниченную по ширине и, как правило, по высоте полосу воздушного пространства, специально выделенную для полётов летательных аппаратов. Ширина воздушного коридора и, соответственно 4D коридора воздушного движения, устанавливается руководящими документами.

В [Федеральные правила..., 2010] приводятся следующие определения:

«воздушная трасса» – контролируемое воздушное пространство (или его часть) в виде коридора, ограниченное по высоте и ширине;

«местная воздушная линия» – контролируемое воздушное пространство (ниже эшелона перехода) в виде коридора, ограниченное по высоте и ширине.

Ширина воздушной трассы в РФ устанавливается: 10 км (по 5 км в обе стороны от оси воздушной трассы) – при использовании системы наблюдения обслуживания воздушного движения; 20 км (по 10 км в обе стороны от оси воздушной трассы) – без использования системы наблюдения обслуживания воздушного движения. Ширина местной воздушной линии должна быть не более 4 км [Федеральные правила..., 2010]. Трехмерный воздушный коридор (воздушная трасса) ограничен по высоте верхней и нижней границами. 4D коридор воздушного движения ограничен по размерам во всех четырёх измерениях.

На рис. 11 представлено изображение фрагмента 4D коридора ВС на трассе. По ширине 4D коридор ВС ограничен шириной воздушной трассы. В горизонтальном полете ВС 4D коридор по высоте ограничен довольно узкой полосой: в современных АС УВД при отклонении ВС от заданной высоты на величину ± 60 м выдается сигнализация диспетчеру.

Временное окно пролета заданного пункта при полете по бизнес-траектории ВС может быть ограничено диапазоном (-2 мин; + 3 мин), контролируемое время прибытия в начальную точку захода на посадку (IAF) может быть ограничено допустимым временным окном (± 30 с) [4D trajectory..., 2008]. В соответствии с этим размер временного окна пролета ВС пунктов маршрута Δt может составлять величину от 1 минуты до 5 минут. За это время при скорости 600 км/час ВС пролетит расстояние от 10 до 50 км.

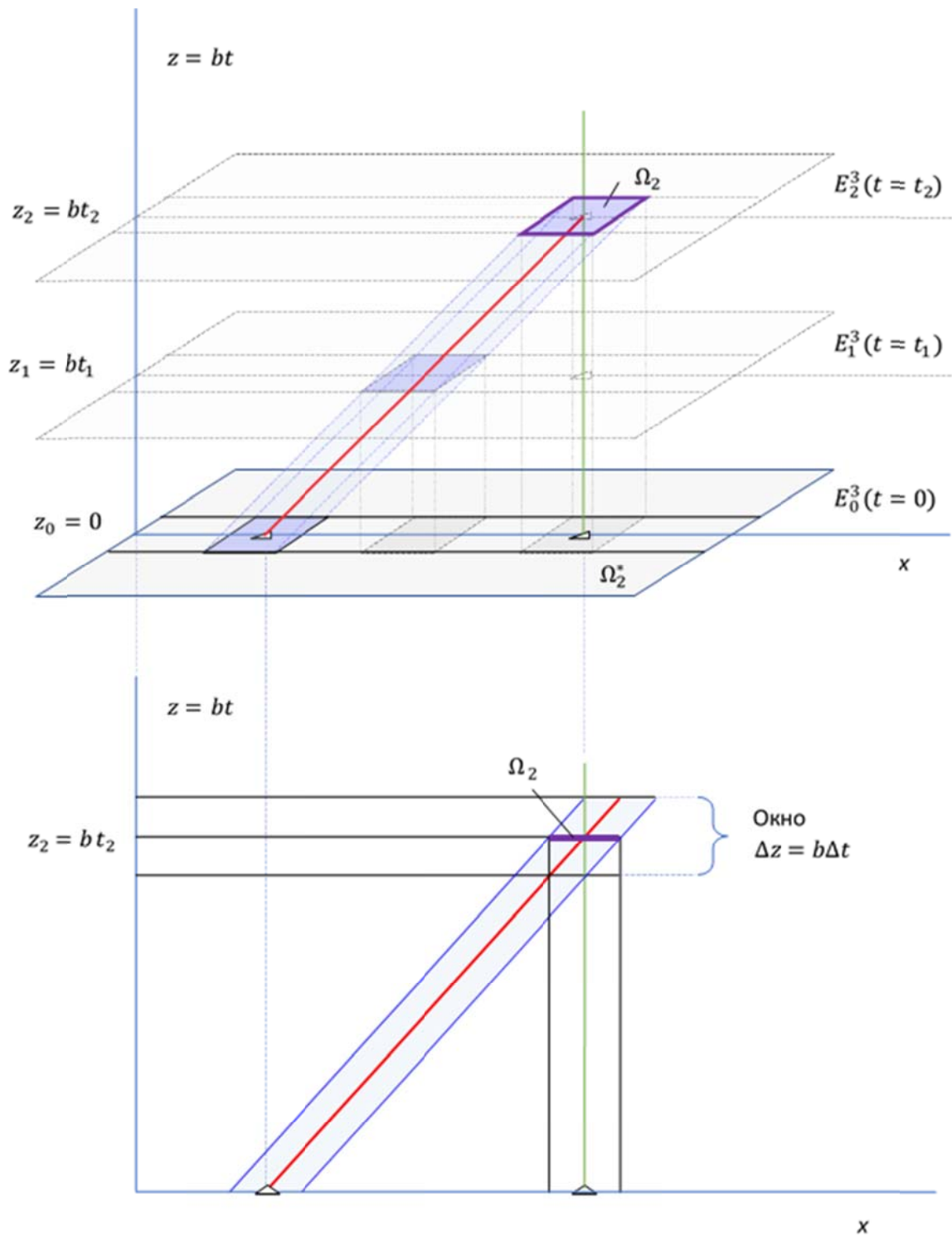


Рисунок 11 – 4D коридор движения ВС

В соответствии с этим, окно пролета пункта маршрута по оси временной протяженности z ограничено величиной $\Delta z = b \Delta t$, где Δt – размер временного окна пролета пункта, через который проходит 4D коридор.

На рис. 11 в момент времени $t = 0$ изображена гиперплоскость $E_0^3(t = 0)$, которая есть ни что иное, как трёхмерное евклидово пространство настоящего.

В момент времени $t = t_1$ на рисунке изображена гиперплоскость $E_1^3(t = t_1)$, которое представляет собой трёхмерное евклидово пространство будущего. Аналогичным образом, в момент времени $t = t_2$ на рисунке изображена гиперплоскость $E_2^3(t = t_2)$, которое также есть трёхмерное евклидово пространство будущего.

Сечением 4D коридора ВС гиперплоскостью (трехмерным пространством) называется фигура, состоящая из всех точек, которые являются общими для 4D коридора и секущей гиперплоскости (трехмерного пространства).

На рисунке изображено сечение Ω_2 4D коридора гиперплоскостью (трехмерным пространством) $E_2^3(t = t_2)$. Сечение Ω_2 представляет собой трехмерную фигуру, в пределах которой должно находиться ВС в момент времени $t = t_2$. При горизонтальном полете ВС Ω_2 представляет собой параллелепипед, ограниченный шириной трассы, допустимыми высотами полета и продольными пространственными границами. Продольный размер этого параллелепипеда составляет $W\Delta t$, где W – путевая скорость ВС. При путевой скорости ВС $W = 600$ км/час, обычные размеры этого параллелепипеда, в пределах которого должно находиться ВС в какой-то определенный момент времени, могут составлять: длина – 10 км, ширина – 10 км, высота – 120 м.

Изображенное на рисунке множество точек пространства настоящего Ω_2^* представляет собой проекцию сечения Ω_2 на трехмерное пространство настоящего $E_0^3(t = 0)$. Фигура Ω_2^* – это трехмерная фигура, совпадающая по форме и по размерам с фигурой Ω_2 . Физический смысл фигуры Ω_2^* состоит в том, что она ограничивает заданное плановое местоположение ВС в трехмерном пространстве в момент времени $t = t_2$. То есть, если наблюдатель будет следить за местоположением ВС, и если ВС выполняет полет в пределах ширины трассы на заданной высоте, а также в пределах заданного временного окна пролета пунктов трассы (другими словами, если ВС находится в пределах установленного 4D коридора), то в момент времени $t = t_2$ наблюдатель увидит, что ВС находится в пределах параллелепипеда Ω_2^* .

Участок 4D коридора ВС при равномерном прямолинейном движении ВС в трехмерном пространстве представляет собой гиперпараллелепипед, который образуется перемещением («протягиванием») прямоугольного параллелепипеда в четырехмерном пространстве в направлении, определяемом составляющими скорости движения ВС W_x , W_y , W_h вдоль осей x , y и h , а также скоростью b перемещения вдоль оси z .

Полностью весь 4D коридор ВС представляет собой четырёхмерный гиперканал, внутри которого проходит 4D траектория ВС.

Обобщенное понятие n -мерного Евклидова пространства для описания движущегося $n-1$ -мерного мира

Обобщая понятие представленного выше четырёхмерного евклидова пространства с четырёхмерной прямоугольной системой координат, одна из осей которой $z = bt$, в котором расстояние (метрика) между точками задается выражением (1), можно ввести понятие аналогичного n -мерного евклидова

пространства с n -мерной прямоугольной системой координат. Обобщенное n -мерное евклидово пространство имеет $n-1$ пространственных измерений, и n -е измерение, в котором координата материальной точки или координата центра масс (геометрического центра) движущегося объекта определяется в соответствии с выражением $x^n = bt$, где x^n – n -я координатная ось, b – некоторая константа, имеющая размерность скорости, t – время. По сути, n -е измерение этого евклидова пространства также является пространственным. Отличие n -го измерения от других измерений заключается в том, что все материальные точки и все объекты в n -мерном пространстве всегда перемещаются в этом n -м измерении в одну сторону с постоянной скоростью. Никакая точка, никакой объект в n -мерном пространстве не может остановиться, не может замедлить или ускорить свое движение вдоль n -го измерения. В то же самое время, первые $n-1$ измерений подобны измерениям обычного трехмерного евклидова пространства. Вдоль этих измерений материальные точки и другие объекты могут перемещаться с положительной или отрицательной скоростью, с положительным или отрицательным ускорением. Материальные точки и объекты в $n-1$ измерениях могут быть неподвижными. Обозначим n -мерное евклидово пространство с n -мерной прямоугольной системой координат, в которой n -я ось представлена произведением bt как E_{bt}^n . В этом обозначении нижний индекс bt подчеркивает особенность введенного пространства, которая состоит в том, что в одном из пространственных измерений координата материальных точек и всех объектов равна произведению bt . Физический (геометрический) смысл координаты bt – это расстояние, пройденное материальной точкой (объектом) со скоростью b за время t .

Расстояние между двумя точками M_1 и M_2 с координатами $\mathbf{x}_1 = (x_1^1, x_1^2, \dots, x_1^n)$ и $\mathbf{x}_2 = (x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^n)$, где $x_1^n = bt_1$ и $x_2^n = bt_2$, во введенном n -мерном пространстве E_{bt}^n определяется выражением:

$$\rho(M_1, M_2) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_2^i - x_1^i)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n-1} (x_2^i - x_1^i)^2 + b^2(t_2 - t_1)^2}. \quad (2)$$

Обсуждение

Таким образом, в настоящей работе с использованием математического приема замены переменной $z = bt$, где b – некоторая константа, имеющая размерность скорости, t – время, введено понятие четырёхмерного евклидова пространства с прямоугольной декартовой системой координат, использование которого делает представление движения материальной точки наглядным и имеющим простой геометрический смысл обычной линии евклидова пространства. При таком представлении расстояние между любыми двумя точками пространства определяется в соответствии с выражением (1). Кроме того, в таком пространстве можно использовать понятия вектора, угла, треугольника и многих других элементарных понятий евклидовой геометрии. В таком пространстве для описания и исследования движения ВС и других материальных объектов можно использовать четырёхмерную геометрию.

История движения материальной точки в трехмерном пространстве представляет собой, как показали приведенные рассуждения, проекцию четырёхмерной линии движения в четырёхмерном пространстве прошлого на трехмерное пространство настоящего. Аналогичным образом, плановая линия движения материальной точки (или воздушного судна) в трехмерном пространстве – это проекция четырёхмерной линии движения в четырёхмерном пространстве будущего на трехмерное пространство настоящего.

Введенное пространство является математической абстракцией, которую можно использовать для наглядного представления и изучения движения материальных объектов в пространстве и времени.

Четырёхмерное пространство с четвертой осью $z = bt$ позволило ввести понятие 4D коридора воздушного движения. Для каждого ВС 4D коридор представляет собой четырёхмерную фигуру, ограниченную по размерам во всех четырёх измерениях.

В настоящей работе впервые:

1. Введено обобщенное понятие n -мерного евклидова пространства E_{bt}^n с n -мерной прямоугольной системой координат, имеющей n -ую ось $x^n = bt$, где b – константа скорости, t – время. Расстояние между двумя точками в пространстве E_{bt}^n определяется выражением (2).

2. Предложен метод наглядного представления движения материальной точки в пространстве E_{bt}^n , при котором линия движения имеет геометрический смысл линии в n -мерной евклидовой геометрии.

Значение полученных результатов заключается в том, что

1. Во введенном n -мерном пространстве E_{bt}^n в силу того, что все его n измерений являются пространственными, для описания и исследования движения материальных точек и других геометрических объектов можно использовать такой современный и хорошо развитый математический аппарат, как многомерная геометрия.

2. Представленный метод представления движения, по сути, открывает новые направления в науке, которые ждут своих исследователей. Так, например, с использованием представленного метода открывается возможность исследования движения в таком разделе физики как классическая кинематика (возможно, и в динамике). Представляет большой интерес продолжение начатого в этой работе исследования четырёхмерного воздушного движения ВС с использованием представленного в работе метода и четырёхмерной геометрии. В навигации и УВД можно выделить следующие направления исследований, в которых может быть использован представленный в работе подход: планирование использования воздушного пространства, расчет бесконфликтных 4D траекторий в воздушном пространстве, в том числе для решения задач организации и управления потоком прилетающих ВС AMAN (Arrival Management) [AMAN Status..., 2010] и организации и управления потоком вылетающих ВС (DMAN - Departure Management) [DMAN Operational...], разработка методов подтверждения достоверности информации автоматического зависимого наблюдения (АЗН-В) [Плясовских и др., 2020;

Княжский и др., 2020] с использованием понятия 4D коридора, разрешение среднесрочных и краткосрочных конфликтов, а также для решения других задач. Возможно, представленный подход будет представлять интерес в четырёхмерной навигации, в изучении движения во всех видах транспорта, в теории движения космических объектов, механике космического полета, астрономии, баллистике, биомеханике, робототехнике, а также во многих других науках, где исследуется движение каких-либо объектов и тел в пространстве и времени.

Заключение

Таким образом, в настоящей работе изложен оригинальный новаторский метод наглядного геометрического представления движения материальной точки (или другого объекта) в пространстве и времени, который открывает, по сути, новый научный подход к исследованию движения в пространстве и времени с использованием четырёхмерной геометрии. Предложенный подход открывает новые направления научных исследований, в том числе в таком разделе физики как механика, в управлении воздушного движения, а также в других науках, где исследуется движение.

В продолжении работы автор планирует изложить другие результаты, которые не вошли в эту часть, и показать некоторые практические приложения изложенного в настоящей работе метода.

Продолжение следует.

Библиографический список

- Бондаренко, В. А.* Метрические пространства: учебное пособие / В. А. Бондаренко, А. Н. Морозов, А. В. Николаев. Ярославль: ЯрГУ, 2017. 109 с.
- Глобальный аэронавигационный план на 2016–2030 гг. ИКАО, документ 9750-AN/963. – Издание пятое. 2016. 142 с.
- Княжский, А. Ю.* Цифровая модель движения на аэродроме / А. Ю. Княжский, А. П. Плясовских // Вестник Концерна ВКО «Алмаз – Антей». 2020. № 3. С. 96-106. <https://doi.org/10.38013/2542-0542-2020-3-96-106>
- Математика, ее содержание, методы и значение. Под ред. А. Д. Александрова, А. Н. Колмогорова, М. А. Лаврентьева. М.: Изд. Академии наук СССР, 1956. Т. 3 С. 13.
- Начала Евклида. Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского при редакционном участии И. Н. Веселовского и М. Я. Выгодского. М.-Л.: ГТТИ, 1949-1951.
- Плясовских, А. П.* Теоретическое обоснование подтверждения достоверности информации о местоположении объекта на рабочей площади аэродрома / А. П. Плясовских, Е. А. Рубцов // Т-Comm: Телекоммуникации и транспорт. 2020. Том 14. №3. С. 32-40.
- Руководство по полетам и потокам движения: информация для совместного использования воздушного пространства (FF-ICE). ИКАО, документ 9965. 2012. 172 с.
- Федеральные правила использования воздушного пространства Российской Федерации: утв. постановлением Правительства РФ от 11 марта 2010 г. № 138. Москва.
- «AMAN Status Review 2010», Eurocontrol - Ed.0.1, Dec. 2010.
- «DMAN Operational Concept Development». Eurocontrol document, Airport CDM Task Force 12, Edition Number 0.4. EUROCONTROL HQ, Brussels, 25.01.2006.
- Global Air Traffic Management Operational Concept. ICAO, Doc 9854 AN/458. – First Edition. 2005. 82 p.
- Pasini Andrea, Notry Philippe, Delahaye Daniel.* Direct Route Optimization for Air Traffic Management Improvement. DASC 2018, 37th AIAA/IEEE Digital Avionics Systems Conference,

Sep 2018, Londres, United Kingdom. URL: <https://hal-enac.archives-ouvertes.fr/hal-01886537/document> (дата обращения: 09.02.2021)

The Aviation System Block Upgrades (Draft 2016). ICAO. 2016. 402 p. URL: https://www.icao.int/airnavigation/Documents/ASBU_2016-FINAL.pdf (дата обращения: 11.01.2021)

4D trajectory management: an initial pilot perspective URL: https://www.eurocontrol.int/eec/public/standard_page/EEC_News_2008_2_TM.html (дата обращения: 11.01.2021)

References

- «AMAN Status Review 2010», Eurocontrol - Ed.0.1, Dec. 2010. (in English)
- «DMAN Operational Concept Development». Eurocontrol document, Airport CDM Task Force 12, Edition Number 0.4. EUROCONTROL HQ, Brussels, 25.01.2006. (in English)
- 2016–2030 ICAO Global Air Navigation Plan, Doc 9750-AN/963. – The fifth issue. 2016. 142 p. (in Russian)
- 4D trajectory management: an initial pilot perspective URL: https://www.eurocontrol.int/eec/public/standard_page/EEC_News_2008_2_TM.html (accessed date: 11.01.2021) (in English)
- Bondarenko, V. A. (2017) Metric spaces: text-book / V. A. Bondarenko, A. N. Morozov, A. V. Nikolaev. Yaroslavl: YarSU, 2017. 109 p. (in Russian)*
- Euclid's "Elements" (1949-1951). D. D. Morduhaj-Boltovskiy's translation from Greek and comments with editorial participation of I. N. Veselovskiy and M. Ja. Vygodskiy M.-L.: GTTI, 1949-1951. (in Russian)
- Federal rules for use of the Russian Federation air space: appr. by Decision of the RF Government of March 11th 2010. № 138. Moscow. (in Russian)
- Global Air Traffic Management Operational Concept. ICAO, Doc 9854 AN/458. – First Edition. 2005. 82 p. (in English)
- Knjazhskij, A. Ju. (2020) Digital model of motion on an airdrome / A. Ju. Knjazhskij, A. P. Pljasovskikh // Journal of "Almaz-Antey". 2020. № 3. Pp. 96-106. <https://doi.org/10.38013/2542-0542-2020-3-96-106> (in Russian)*
- Manual on Flight and Flow — Information for a Collaborative Environment (FF-ICE). ICAO, Doc 9965. 2012. 172 p. (in Russian)
- Mathematics, its contents, methods and importance (1956). Ed. by A. D. Aleksandrov, A. N. Kolmogorov, M. A. Lavrent'ev. M.: USSR Academy of Sciences, 1956. V. 3 Pp. 13. (in Russian)
- Pasini Andrea, Notry Philippe, Delahaye Daniel. Direct Route Optimization for Air Traffic Management Improvement. DASC 2018, 37th AIAA/IEEE Digital Avionics Systems Conference, Sep 2018, Londres, United Kingdom. URL: <https://hal-enac.archives-ouvertes.fr/hal-01886537/document> (accessed date: 09.02.2021) (in English)*
- Plyasovskikh, A. P. (2020) Theoretical justification of validation of information about the object position on the airdrome movement area / A. P. Plyasovskikh, E. A. Rubcov // T-Comm: Telecommunications and transport. 2020. Volume 14. №3. Pp. 32-40. (in Russian)*
- The Aviation System Block Upgrades (Draft 2016). ICAO. 2016. 402 p. URL: https://www.icao.int/airnavigation/Documents/ASBU_2016-FINAL.pdf (accessed date: 11.01.2021) (in English)